גזים קוונטיים - הגבול הקלאסי ופרמיונים בטמפרטורות נמוכות

18.6.15

1 הגבול הקלאסי

בגבול של טמפרטורות גבוהות / צפיפות נמוכה, ההתנהגות של גז פרמיונים וגז בוזונים שואפת להתנהגות של גז אידיאלי קלאסי. בגבול זה הנפח התרמי של חלקיק (λ_T^d) קטן מאוד מהנפח פר חלקיק: $v \equiv \frac{V}{N} >> \lambda_T^d$. בתרגול היום נעבוד ב-$d = 3$.

תזכורת: עבור גז אידיאלי, $N = z\frac{V}{\lambda_T^3}$. לכן $\frac{V}{N} >> \lambda_T^3 \Leftarrow z << 1$. כלומר הגבול הקלאסי הוא הגבול של fugacity קטן. בגבול זה:

- אכלוס מצב עם אנרגיה ϵ: $n(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}\pm 1} = \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\epsilon}\pm 1} \underset{z<<1}{\rightarrow} ze^{-\beta\epsilon} << 1$
האכלוס הממוצע של כל מצב קטן מאוד מ-1 ולכן לא סביר שיקרה ש-2 חלקיקים או יותר יהיו באותו מצב. לכן סטטיסטיקת החלקיקים לא משנה.

- מספר החלקיקים: $N = \sum\limits_i \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i-\mu)}\pm 1} \underset{z<<1}{\rightarrow} z\sum\limits_i e^{-\beta\epsilon_i}$
פונקצית החלוקה הגרנד קנונית: $\mathcal{L} = \prod\limits_i \mathcal{L}_i$, ולכן הפוטנציאל הגרנד קנוני:

$$-PV = \Omega = \mp k_BT\sum_i \log\left(1 \pm e^{\beta(\mu-\epsilon_i)}\right) \underset{z<<1}{\rightarrow} -k_BTz\sum_i e^{-\beta\epsilon_i} = -Nk_BT$$

כאשר השתמשנו בטור טיילור: $\log(1+x) \underset{x<<1}{\approx} x$. נציב את הביטוי שמצאנו למספר החלקיקים, ונקבל:
$\boxed{PV = Nk_BT}$ - משוואת המצב של גז אידיאלי קלאסי.

- האנרגיה החופשית של הלמהולץ:

$$F = E - TS = \mu N - PV = Nk_BT\log z - Nk_BT$$

כאשר במעבר האחרון השתמשנו בכך ש-$z = e^{\beta\mu}$ ובכך ש-$\Omega = -PV$.
כעת ניקח את הגבול של $z << 1$: נציב באיבר הראשון $z = \frac{N}{\sum\limits_i e^{-\beta\epsilon_i}}$ (בהתאם לתוצאה שקיבלנו קודם), נקבל:

$$\begin{aligned} F &\underset{z<<1}{\rightarrow} Nk_BT\log\frac{N}{\sum\limits_i e^{-\beta\epsilon_i}} - Nk_BT \\ &= k_BT\Big(N\log N - N - N\log\underbrace{\sum_i e^{-\beta\epsilon_i}}_{=Q_1}\Big) \\ &\underset{N>>1}{\cong} -k_BT\log\frac{Q_1^N}{N!} \overset{!}{=} -k_BT\log Q_N \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{Q_N = \frac{Q_1^N}{N!}}$$

קיבלנו את פונקצית החלוקה הקנונית, כולל הפקטור $N!$ המתאים לחלקיקים בלתי ניתנים להבחנה (ואכן התחלנו מבעיה קוונטית של חלקיקים בלתי ניתנים להבחנה).

2 גז פרמיונים ב־$T=0$

האכלוס הממוצע של רמה באנרגיה ϵ נתון ע"י התפלגות פרמי־דירק: $n_{FD}(\epsilon)=\frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1}$.

מכיוון ש: $e^{\beta x} \underset{T\to 0}{\to} \begin{cases}\infty & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$, נקבל שב־$T=0$:

$$n_{FD}(\epsilon)=\frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1} \underset{T\to 0}{\to} \begin{cases}1 & \epsilon<\mu\\ 0 & \epsilon>\mu\end{cases}$$

כלומר, כל רמות האנרגיה מאוכלסות עד לאנרגיה $\epsilon=\mu$, וכל רמות האנרגיה עם אנרגיה גבוהה יותר ריקות.
מגדירים את אנרגית פרמי: $\lim\limits_{T\to 0}\mu(T)=\epsilon_F$.

נדון בגז פרמי חופשי לא יחסותי עם דיפרסיה ריבועית: $\epsilon=\frac{p^2}{2m}=\frac{\hbar^2k^2}{2m}$, בשלושה מימדים, עם תנאי שפה מחזורי, וניוון g_0. נגדיר גם את רדיוס פרמי: $k_F=\frac{\sqrt{2m\epsilon_F}}{\hbar}$.

כפי שראינו בתרגול שעבר, צפיפות המצבים היא: $g(\epsilon)=\frac{g_0V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\epsilon^{1/2}\equiv C\epsilon^{1/2}$.

חישוב אנרגיית פרמי

נרצה לבטא את ϵ_F באמצעות הפרמטרים התרמודינמיים של הבעיה.

$$\begin{aligned} N &= \int_0^\infty d\epsilon g(\epsilon)n(\epsilon) \underset{T\to 0}{\to} C\int_0^{\epsilon_F}\epsilon^{1/2}d\epsilon=\frac{2C}{3}\epsilon_F^{3/2}\\ \Rightarrow \epsilon_F &= \frac{\hbar^2}{2m}\Big(\frac{6\pi^2}{g_0}n\Big)^{2/3}=\frac{\hbar^2k_F^2}{2m}\end{aligned}$$

כאשר $n\equiv\frac{N}{V}$.
בנוסף, נוכל לבטא את C באמצעות N ו־ϵ_F: $C=\frac{3N}{2\epsilon_F^{3/2}}$, ולכן: $g(\epsilon)=\frac{3N}{2\epsilon_F^{3/2}}\epsilon^{1/2}$.

האנרגיה הכוללת של המערכת

כעת נחשב את אנרגית המערכת:

$$E=\int_0^\infty d\epsilon\epsilon g(\epsilon)n(\epsilon) \underset{T\to 0}{\to} \frac{3N}{2\epsilon_F^{3/2}}\int_0^{\epsilon_F}\epsilon^{3/2}d\epsilon=\frac{3}{5}N\epsilon_F$$

כלומר, האנרגיה הממוצעת של חלקיק היא $\frac{E}{N}=\frac{3}{5}\epsilon_F$. גם בטמפרטורה אפס, למערכת יש אנרגיה גדולה מאפס, בשונה מגז אידיאלי קלאסי.

חישוב הלחץ

ראשית, נחשב את הלחץ **עבור טמפרטורה כללית**. ראינו שפונקצית החלוקה הגרנד קנונית של מצב i היא: $\mathcal{L}_i=1+e^{\beta(\mu-\epsilon_i)}$.
פונקצית החלוקה הגרנד קנונית של המערכת כולה: $\mathcal{L}=\prod\limits_i\mathcal{L}_i$

לכן הפוטנציאל הגרנד קנוני הוא:

$$\begin{aligned} -PV &= \Omega=-k_BT\sum_i\log\left(1+e^{\beta(\mu-\epsilon_i)}\right)\\ &\to -k_BT\int_0^\infty d\epsilon g(\epsilon)\log\left(1+e^{\beta(\mu-\epsilon)}\right)\end{aligned}$$

נבצע אינטגרציה בחלקים:

$$\frac{PV}{k_BT}=\underbrace{\Sigma(\epsilon)\cdot\log\left(1+e^{\beta(\mu-\epsilon)}\right)\Big|_0^\infty}_{=0}+\beta\int_0^\infty d\epsilon\Sigma(\epsilon)\underbrace{\frac{e^{\beta(\mu-\epsilon)}}{1+e^{\beta(\mu-\epsilon)}}}_{=n(\epsilon)}$$

נזכור ש: $\Sigma(\epsilon)=\frac{2C}{3}\epsilon^{3/2}=\frac{2}{3}\epsilon g(\epsilon)$. לכן:

$$\begin{aligned}\frac{PV}{k_BT} &= \frac{2\beta}{3}\underbrace{\int_0^\infty d\epsilon\epsilon g(\epsilon)n(\epsilon)}_{=E}\\ \Rightarrow PV &= \frac{2}{3}E\end{aligned}$$

קשר זה נכון בכל טמפרטורה (ובפרט לטמפרטורות גבוהות, ולכן הוא נכון עבור גז אידיאלי קלאסי ־ ניתן לראות זאת מהצבת חוק החלוקה השווה $E=\frac{3}{2}Nk_BT$).

בטמפרטורה 0, נציב את הביטוי שקיבלנו עבור E ונקבל:

$$P=\frac{2}{5}n\epsilon_F\sim n^{5/3}$$

לגז פרמי יש לחץ שונה מאפס בטמפרטורה אפס (בשונה מגז אידיאלי, ובהתאם לכך שיש לו גם אנרגיה גדולה מאפס).

הקומפרסביליות האיזותרמית (isothermal compressibility)

הקומפרסביליות האיזותרמית מתארת איך משתנה הנפח כאשר משנים את הלחץ בטמפרטורה קבועה. היא מוגדרת על ידי: $\kappa^{-1}=-V\frac{\partial P}{\partial V}$. נחשב אותה עבור פרמיונים ב־$T=0$.

ראינו ש:

$$P=\frac{2}{5}n\epsilon_F=\frac{2}{5}\frac{N}{V}\epsilon_F$$

וגם:

$$\epsilon_F=\frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2\frac{N}{V})^{2/3}$$

לכן:

$$P=\frac{2}{5}\frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2)^{2/3}(\frac{N}{V})^{5/3}$$

$$\Rightarrow\kappa^{-1}=-V\frac{\partial P}{\partial V}=\frac{5}{3}P\sim n^{5/3}$$

קיבלנו שלגז פרמיונים יש קומפרסביליות סופית בטמפרטורה אפס, כלומר גם בטמפרטורה אפס יש לבצע עבודה כדי לכווץ את הגז. זה הגיוני מכיוון שכאשר מקטינים את V, ההפרש בין רמות האנרגיה עולה (כי $\Delta k \sim \frac{1}{L}$), ולכן גז של N פרמיונים (המאכלסים את N הרמות בעלות האנרגיה הנמוכה ביותר בטמפרטורה אפס) יהיה בעל אנרגיה גבוהה יותר כאשר V קטן יותר.

כאשר $n \to 0$, הקומפרסביליות מתבדרת (כשאין חלקיקים, ניתן לכווץ את המערכת בלחץ קטן כרצוננו).
נשווה לקומפרסביליות של גז קלאסי:
לגז קלאסי: $PV = Nk_BT$ ולכן כאשר $T = 0$, $P = 0$. הקומפרסביליות: $\kappa^{-1} = -V\frac{\partial P}{\partial V} = V \cdot \frac{Nk_BT}{V^2} = \frac{Nk_BT}{V}$
הקומפרסביליות של גז קלאסי מתבדרת בטמפרטורה אפס, בניגוד לגז פרמיונים, שלו קומפרסביליות סופית בטמפרטורה אפס.

כוכב ניוטרונים \ ננס לבן

לחץ ניוון של פרמיונים בטמפרטורה נמוכה הוא הלחץ שמונע מננסים לבנים וכוכבי ניוטרונים לקרוס בשל הכוח שמפעילה הגרביטציה. קיבלנו שלחץ הפרמיונים תלוי בנפח כך: $P_F \sim V^{-5/3}$. ניתן להראות שהלחץ כתוצאה מגרביטציה הפועל על כוכב (כדור) בנפח V הוא $P_g \sim -V^{-4/3}$. בכוכבים כמו השמש יש היתוך גרעיני בליבה, שגורם לטמפרטורה גבוהה (בשמש - כ־10 מיליון מעלות). הטמפרטורה הגבוהה גורמת ללחץ תרמי שמאזן את הלחץ הגרביטציוני. כוכב בסוף חייו מכלה את דלק הבערה ואז הוא נכבה ומתקרר. בקירוב טוב הטמפרטורה שלו היא אפס - אין לחץ תרמי, והכוכב מתכווץ. מה מונע מהלחץ הגרביטציוני להקריס את הכוכב לנקודה? זהו הלחץ הפרמיוני (בננס לבן התרומה העיקרית היא של האלקטרונים, מכיוון שהמסה שלהם קטנה פי 2000 מזו של הפרמיונים והניוטרונים ו־$\epsilon_F \sim \frac{1}{m}$. כוכב ניוטרונים עשוי ברובו מניוטרונים, ובו הלחץ הוא בשל הניוטרונים).

התנאי $P_g + P_F = 0$ נותן לנו את נפח הכוכב V. הוא מאוד קטן - לכוכב ניוטרונים עם מסה דומה לזו של השמש שלנו (כמיליון פעמים מסת כדור הארץ) יש רדיוס של קילומטרים ספורים בלבד (בעוד רדיוס כדור הארץ כ־6400 קילומטר). ל־V מספיק קטן, $V^{-5/3}$ גדול יותר מ־$V^{-4/3}$ לכן ללא תלות במקדם קיים נפח עבורו הלחצים משתווים.

2.1 קיבול החום של אלקטרונים בטמפרטורה נמוכה

מהי טמפרטורה נמוכה? טמפרטורה שמקיימת $T_F >> T$. נחשב את $T_F = \frac{\epsilon_F}{k_B}$ עבור אלקטרונים במתכת. לאלקטרונים ספין $\frac{1}{2}$ ולכן עבורם ניוון הספין הוא $g_0 = 2s + 1 = 2$, כלומר $\epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2 n)^{2/3}$.

צפיפות אלקטרוני ההולכה האופיינית במתכות: $n \approx 10^{22}\, el/cm^3$. נשתמש במסת אלקטרון חופשי $m \approx 9 \cdot 10^{-31} kg$. נציב ונקבל: $T_F = \frac{\epsilon_F}{k_B} \approx 20,000\, K$. מכאן שביחס ל־$T_F$, טמפרטורת החדר $T \approx 300K$ היא טמפרטורה נמוכה.

עבור גז קלאסי, קיבול החום הוא $C_V = \frac{3}{2}Nk_B$. בפועל, כשמדדו את קיבול החום של מתכות קיבלו ערכים נמוכים בהרבה. מה הסיבה לכך?

נעריך את התרומה של גז האלקטרונים שבמתכת לקיבול החום. מכניסים חום למערכת - מעלים את הטמפרטורה מ־0 ל־T. בכמה תעלה האנרגיה? מכיוון שהטמפרטורה נמוכה, בקירוב כל רמות האנרגיה מלאות עד ל־k_F. האלקטרונים בעלי $|k|$ נמוך משמעותית מ־k_F לא יכולים לשנות אנרגיה ולתרום לקיבול החום מכיוון שהפרש האנרגיה למצבים היחידים שזמינים להם גדול בהרבה מ־k_BT. לכן בקירוב רק האלקטרונים שמרוחקים מ־ϵ_F בעד כ־k_BT תורמים לקיבול החום. כמה אלקטרונים כאלה יש?

$$\Sigma(\epsilon_F) - \Sigma(\epsilon_F - k_BT) \underset{k_BT << \epsilon_F}{\cong} \Sigma(\epsilon_F) - \left(\Sigma(\epsilon_F) + \frac{\partial \Sigma}{\partial \epsilon}\Big|_{\epsilon_F} k_BT\right) = g(\epsilon_F)k_BT = \frac{3N}{2\epsilon_F}k_BT$$

במעבר האחרון השתמשנו בתוצאה שקיבלנו קודם: $g(\epsilon_F) = \frac{3N}{2\epsilon_F}$.

נתיחס לכל אלקטרון בתחום זה כאל חלקיק קלאסי שתורם לקיבול החום $\frac{3}{2}k_B$. לכן קיבול החום יהיה שווה למספר החלקיקים שהאנרגיה שלהם עולה כאשר מעלים את הטמפרטורה כפול תרומת כל אחד מהחלקיקים האלה לקיבול החום:

$$\frac{C_V}{N} = \frac{3}{2\epsilon_F}k_BT \cdot \frac{3}{2}k_B = \frac{9}{4}k_B\frac{T}{T_F}$$

ניתן לחשב את קיבול החום של גז אלקטרונים בטמפרטורה נמוכה בצורה מדויקת (על ידי פיתוח זומרפלד). התוצאה המדויקת היא: $\frac{C_V}{N}=\frac{\pi^2}{2}k_B\frac{T}{T_F}+O\left((\frac{T}{T_F})^2\right)$. כלומר שונה רק בערך בפקטור 2 מהתוצאה שהערכנו.

זהו קיבול החום של המערכת כתוצאה מהאלקטרונים. מסתבר שזוהי התרומה הדומיננטית לקיבול החום בטמפרטורות נמוכות מספיק. בטמפרטורות גבוהות יותר יש תרומה לקיבול החום מדרגות חופש נוספות (תנודות של האטומים ־ פונונים). קיבלנו שקיבול החום ליניארי ב־T, בניגוד לתוצאה הקלאסית שאינה תלויה בטמפרטורה. דבר זה מסביר את קיבול החום הנמוך (ביחס למודל הקלאסי) שנמדד למתכות בטמפרטורת החדר.

3 גז פרמי אידיאלי בגבול הקלאסי

נרצה לקחת את הגבול הקלאסי $z<<1$. בניגוד לתחילת התרגול, כאן נעבור מסכום לאינטגרל ונקבל תיקונים מסדר גבוה יותר ב־z. כמו כן, נתמקד כאן בגז פרמיונים.

נדון בגז פרמי אידיאלי בשלושה מימדים, כפי שעשינו עד כה. ראשית, נעבור מסכום לאינטגרל ונחשב את מספר החלקיקים ואת הלחץ של הגז. נקבל ביטויים איתם יהיה נוח לעבוד כאשר נרצה להסתכל על הגבול הקלאסי $z<<1$.

כפי שראינו בתרגול שעבר, צפיפות המצבים היא: $g(\epsilon)=g_0\cdot 2\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\epsilon^{1/2}$.

מספר החלקיקים:

$$\begin{aligned}
N &= \int_0^\infty d\epsilon g(\epsilon)n_{FD}(\epsilon)=g_0\cdot 2\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\int_0^\infty d\epsilon\frac{\epsilon^{1/2}}{z^{-1}e^{\beta\epsilon}+1}\\
&= g_0\cdot 2\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\int_0^\infty\frac{dx}{\beta}\frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{1/2}}{z^{-1}e^x+1}\\
&= g_0\cdot 2\pi^{-1/2}V\underbrace{\left(\frac{2\pi m}{h^2\beta}\right)^{3/2}}_{=\lambda_T^{-3}}\int_0^\infty dx\frac{x^{1/2}}{z^{-1}e^x+1}
\end{aligned}$$

כאשר במעבר האחרון ביצענו החלפת משתנה: $x=\beta\epsilon$.

נגדיר: $f_\nu(z)=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^\infty dx\frac{x^{\nu-1}}{z^{-1}e^x+1}$.

אז:

$$N=g_0\frac{V}{\lambda_T^3}f_{3/2}(z) \tag{1}$$

(מכיוון ש־$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

באופן דומה נעבור מסכום לאינטגרל בביטוי עבור הפוטנציאל הגרנד קנוני, ונקבל:

$$
\begin{aligned}
-PV &= \Omega = -k_BT\sum_i \log\left(1+e^{\beta(\mu-\epsilon_i)}\right) \\
\Rightarrow \frac{PV}{k_BT} &= \sum_i \log\left(1+e^{\beta(\mu-\epsilon_i)}\right) \to \int_0^\infty d\epsilon g(\epsilon)\log\left(1+e^{\beta(\mu-\epsilon)}\right) \\
&= g_0\cdot 2\pi V\Big(\frac{2m}{h^2}\Big)^{3/2}\int_0^\infty d\epsilon\epsilon^{1/2}\log\left(1+ze^{-\beta\epsilon}\right) \\
\Rightarrow \frac{P}{k_BT} &= g_0\cdot 2\pi\Big(\frac{2m}{h^2\beta}\Big)^{3/2}\int_0^\infty dx\cdot x^{1/2}\log\left(1+ze^{-x}\right) \\
&\stackrel{(1)}{=} g_0\cdot 2\pi\Big(\frac{2m}{h^2\beta}\Big)^{3/2}\cdot\frac{2}{3}\int_0^\infty dx\cdot\frac{x^{3/2}ze^{-x}}{1+ze^{-x}} \\
&= g_0\cdot 2\pi\Big(\frac{2m}{h^2\beta}\Big)^{3/2}\frac{2}{3}\int_0^\infty dx\cdot\frac{x^{3/2}}{z^{-1}e^x+1} \\
&\stackrel{(2)}{=} \frac{g_0}{\lambda_T^3}f_{5/2}(z)
\end{aligned}
$$

במעבר (1) השתמשנו באינטגרציה בחלקים, ובמעבר (2) השתמשנו ב־$\Gamma(\frac{5}{2})=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$.

3.1 הגבול של טמפרטורות גבוהות (או צפיפות נמוכה)

נניח לשם פשטות $g_0=1$. נפתח את $f_\nu(z)$ לטור בגבול של $z<<1$: $f_\nu(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^\nu}z^n$. (וניתן לקבל זאת מטור טיילור של $\frac{1}{1+x}$ ומהגדרת פונקציית גאמה $\Gamma(t)=\int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx$, כפי שנראה למטה ב־(*)):
ניקח את הפיתוח עד סדר שני ב־z קטן במשוואה (1) ונקבל:

$$\frac{\lambda_T^3}{\nu}\cong z-\frac{1}{2^{3/2}}z^2$$

ראינו ש: $\frac{1}{\nu}=\frac{1}{\lambda_T^3}f_{3/2}(z)$, ו־$\frac{P}{k_BT}=\frac{1}{\lambda_T^3}f_{5/2}(z)$. מכאן:

$$
\begin{aligned}
\frac{Pv}{k_BT} &= \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)}\cong\frac{z-\frac{1}{2^{5/2}}z^2}{z-\frac{1}{2^{3/2}}z^2}=\frac{1-\frac{1}{2^{5/2}}z}{1-\frac{1}{2^{3/2}}z} \\
&\cong 1-\Big(\frac{1}{2^{5/2}}-\frac{1}{2^{3/2}}\Big)z=1+\frac{1}{2^{5/2}}z
\end{aligned}
$$

בסדר ראשון, $z\cong\frac{\lambda_T^3}{v}$. נציב זאת ונקבל:

$$\boxed{\frac{Pv}{k_BT}\cong 1+\frac{1}{4\sqrt{2}}\Big(\frac{\lambda_T^3}{v}\Big)}$$

קיבלנו תיקון סדר ראשון למשוואת המצב של גז אידיאלי. התיקון חיובי ־ הלחץ גבוה יותר מזה של גז אידיאלי קלאסי.

(*) חישוב הביטוי הטורי ל־$f_\nu(z)$:

טור טיילור של $\frac{1}{1+x}$: $\frac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ עבור $|x|<1$.

אנחנו עובדים בגבול $z<<1$, ו־$e^{-x}<1$ עבור $x>0$ ⇐ $ze^{-x}<1$. לכן נוכל להשתמש בטור טיילור הנ"ל כדי לקבל:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^{-1}e^x+1} &= ze^{-x}\frac{1}{1+ze^{-x}} = ze^{-x}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n e^{-xn}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{n+1}e^{-x(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}z^n e^{-xn}\end{aligned}$$

נציב בהגדרת $f_\nu(z)$:

$$\begin{aligned}f_\nu(z) &= \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^\infty dx\frac{x^{\nu-1}}{z^{-1}e^x+1}\\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}z^n\int_0^\infty dx x^{\nu-1}e^{-xn}\\ &\overset{y=xn}{=} \frac{1}{\Gamma(\nu)}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}z^n\cdot\frac{1}{n^\nu}\underbrace{\int_0^\infty dy y^{\nu-1}e^{-y}}_{=\Gamma(\nu)}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^\nu}z^n\end{aligned}$$