התעבות בוזה־אינשטיין

אמיר בר

27 ביוני 2013

מטרתנו בתרגול זה היא לחזור על כל השלבים שמביאים לתנאי להתעבות בוזה־אינשטיין.

1 גז בוזונים אידאלי

ראשית נגזור את פונקציית החלוקה הגרנד קנונית של גז בוזונים אידאלי. אנחנו מדמיינים גז בוזונים בקופסה בנפח $V = L^3$. דרגות החופש הם האיכלוס של המודים הקוונטיים. הבסיס הנוח ביותר לעבודה הוא בסיס התנע, מכיוון שההמילטוניאן הוא של חלקיקים חופשיים

$$\hat{H} = \sum_i \hat{H}_i = \sum_i \frac{\hat{p}_i^2}{2m}$$

לפיכך, פונקציית החלוקה הקנונית היא

$$\mathcal{Q}\left(N,\beta\right) = \sum_{\{n_p\}}^{\prime} e^{-\beta n_p \epsilon_p}$$

כאשר:

1. $\sum'$ משמעותו שהסכום מאולץ על $\sum_p n_p = N$
2. הסכימה על כל n_p היא מ 0 עד ∞
3. מצבי p האפשריים הם $p = \frac{2\pi}{L}\hbar\vec{k}$ כאשר $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3)$ ו k_i הם מספרים טבעיים
4. $\epsilon_p = \frac{p^2}{2m}$

כדי להתמודד עם הסכום המאולץ נעבור לצבר הגרנד קנוני:

$$\mathcal{L}\left(z,\beta\right) = \sum_{N=0}^{\infty} z^N \mathcal{Q}\left(N,\beta\right) = \prod_p \sum_{n_p=0}^{\infty} z^{n_p} e^{-\beta n_p \epsilon_p} = \prod_p \left(\frac{1}{1 - ze^{-\beta\epsilon_p}}\right)$$

כאשר השתמשנו בנוסחאת טור הנדסי והנחנו ש $z < 1$. במקרה של פרמיונים החישוב היה זהה, אבל הסכום על n_p היה רק על 0 ו 1. [**שאלה**: מה היה קורה אילו הסכום היה על $n_p = 0..K$ עבור K מספר טבעי כלשהו?]. הפוטנציאל הגרנד קנוני, שהוא פשוט PV, ניתן ע"י

$$PV = k_B T \log \mathcal{L} = -k_B T \sum_p \log\left(1 - ze^{-\beta\epsilon_p}\right)$$

מספר הבוזונים הממוצע מתקבל על ידי גזירה לפי $\log z$:

$$N = \frac{\partial \log \mathcal{L}}{\partial \log z} = -z \sum_p \frac{-e^{-\beta\epsilon_p}}{1 - ze^{-\beta\epsilon_p}} = \sum_p \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\epsilon_p} - 1}$$

כאשר לוקחים את הגבול התרמודינמי $L \to \infty$, צפיפות המודים נעשית גבוהה ואפשר (לכאורה) להחליף את הסכום באינטגרל:

$$\sum_p \to \frac{V}{\left(2\pi\hbar\right)^3} \int d^3\vec{p}$$

עכשיו נשתמש לראשונה בצורה המפורשת של $\epsilon_p = \frac{p^2}{2m}$: מכיוון שהאנרגיה תלויה רק בערך המוחלט של התנע, אפשר לעבור לקורדינטות כדוריות .

$$\int d^3\vec{p} \to \int_0^{\infty} p^2 dp \int_0^{\pi} \sin\left(\vartheta\right) d\vartheta \int_0^{2\pi} d\phi$$

ולעשות את האינטרגל על הזויות, שיוצא כמו תמיד 4π. לכן

$$\frac{PV}{k_BT}=-\frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3}\int dp\times p^2\log\left(1-z\exp\left[-\beta\frac{p^2}{2m}\right]\right)$$

נעשה חילוף משתנה אחרון ל $x=\sqrt{\frac{\beta}{2m}}p$ ונקבל

$$\frac{P}{k_BT} = -\frac{1}{2\pi^2\hbar^3}\times\left(\sqrt{2mk_BT}\right)^3\int_0^\infty dx\times x^2\log\left(1-z\exp\left[-x^2\right]\right)=\frac{1}{\lambda^3}g_{5/2}\left(z\right) \tag{1}$$

כאשר $\lambda=\sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_BT}}$ ו $g_\alpha(z)=\sum_{n=1}^\infty\frac{z^n}{n^\alpha}$. באותה צורה

$$\frac{N}{V}=\frac{4}{\sqrt{\pi}\lambda^3}\int_0^\infty dx\frac{x^2}{z^{-1}e^{x^2}-1}=\frac{1}{\lambda^3}g_{3/2}(z) \tag{2}$$

שימו לב שכדי לגזור את התוצאות (1) ו (2) השתמשנו ב

1. טרנספורמציה לקואורדינטות כדוריות (מהם הופיע הפקטור p^2). **שאלה:** מה היה קורה לו המערכת לא היתה תלת מימדית אלא דו או חד מימדית?
2. צורה המפורשת של ϵ_p. **שאלה:** מה היה קורה לו $\epsilon_p=|p|^\gamma$ עבור $\gamma\neq 2$?

2 התעבות בוזה אינשטיין

2.1 הגדרת פונקציית בוזה אינשטיין $g_\alpha(z)$

הפונקציה מוגדרת כ

$$g_\alpha(z)=\sum_{n=1}^\infty\frac{z^n}{n^\alpha} \tag{3}$$

הצגה אינטגרלית:

$$g_\alpha(z)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty\frac{x^{s-1}}{z^{-1}e^x-1}dx$$

כאשר $\Gamma(\alpha)$ היא פונקציית גאמה. בואו נראה כיצד האנטגרל למעלה מתאים להגדרה: באינטגרל ב(2) נחליף משתנה ל $t=x^2$ ואז $x=\sqrt{t}$, $dx=\frac{dt}{2\sqrt{t}}$, ולכן

$$\begin{aligned}\frac{N}{V} &= \frac{4}{\sqrt{\pi}\lambda^3}\int_0^\infty\frac{dt}{2\sqrt{t}}\frac{t}{z^{-1}e^t-1}\\ &= \lambda^{-3}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dt\frac{\sqrt{t}}{z^{-1}e^t-1}\end{aligned}$$

ומכיוון ש $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ אפשר לראות כי מתקבלת התוצאה (2).

הפונקצייה $g_\alpha(x)$ נקראת גם $Polylog$ וגם בעוד שמות ואפשר לקרוא עליה בקישורים (או פשוט לחפש $Polylog$ בגוגל):

1. http://en.wikipedia.org/wiki/Polylogarithm
2. http://mathworld.wolfram.com/Polylogarithm.html

2.2 מעבר הפאזה

מהצגה (3) אפשר לראות שעבור $\alpha\leq 1$ הפונקצייה מתבדרת ב $z=1$ בעוד שעבור $\alpha>1$ היא סופית: $g_\alpha(1)\equiv\zeta(\alpha)$ כאשר $\zeta(\alpha)$ היא פונקציית זטה של רימן. כשננסה לפתור את משוואה המקבילה ל (2) עבור צפיפות ($\rho=N/V$) נתונה, כלומר

$$\rho=\lambda^{-3}g_\alpha(z)$$

נראה שבצפיפות נמוכה, z קטן. ככל שהצפיפות גדלה, z גדל. עבור $\alpha\leq 1$ לכל צפיפות יש ערך מתאים של $z<1$. עבור $\alpha>1$, לעומת זאת, כאשר הצפיפות מגיעה לערך קריטי ששווה ל $\rho_c=\lambda^{-3}\zeta\left(\alpha\right)$, $z=1$ ועבור צפיפות גבוהה יותר, אין למשוואה פתרון (כי הטור מתבדר עבור $z>1$). לכן התנאי להתעבות הוא $\alpha>1$ ו $\rho>\rho_c$.