קרינת גוף שחור

25.6.15

1 קרינת גוף שחור - נוסחאות

קרינת גוף שחור היא הקרינה הנפלטת מגוף שבולע קרינה בכל התדרים, כלומר הוא פולט קרינה רק כתוצאה מהאנרגיה התרמית שלו ולא כתוצאה מהחזרה או העברה.

חוק פלנק: $\epsilon(\omega,T)=\frac{\hbar}{\pi^2c^3}\frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega}-1}$ היא האנרגיה ליחידת נפח של פוטונים בתחום $[\omega,\omega+d\omega]$

צפיפות האנרגיה הכוללת (אנרגיה ליחידת נפח) היא: $\frac{E}{V}=\int\limits_0^\infty d\omega\epsilon(\omega,T)=\frac{\pi^2}{15}\frac{(k_BT)^4}{(\hbar c)^3}$

חוק וויין: אורך הגל שבו עוצמת הקרינה הנפלטת מקסימלית: $\lambda_{max}=\frac{b}{T}$, כאשר $b\cong 2.898\times10^{-3}m\,K$ הוא קבוע וויין.

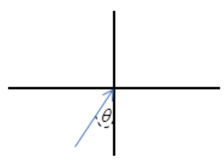
חוק סטפן בולצמן: $I=\sigma T^4$ הוא ההספק ליחידת שטח שנפלט מפני השטח של גוף שחור.
$\sigma=5.67\times10^{-8}W\,m^{-2}\,K^{-4}$ הוא קבוע סטפן בולצמן.

2 חוק סטפן בולצמן

ראיתם בשיעור שצפיפות האנרגיה בגוף שחור היא: $\epsilon=\frac{E}{V}=\frac{\pi^2}{15}\frac{(k_BT)^4}{(\hbar c)^3}$.

נרצה לחשב את שטף האנרגיה הנפלט מפני השטח. שטף זה שווה לצפיפות האנרגיה כפול ההיטל הממוצע של פוטון הנפלט מהמשטח על הכיוון הניצב לו.

המהירות הממוצעת של פוטון בכיוון ניצב למשטח:



$$\langle v\rangle=\frac{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}c\cos\theta\sin\theta d\theta}{\int\limits_0^{\pi}\sin\theta d\theta}=c\frac{\int\limits_0^1 xdx}{2}=\frac{c}{4}$$

לכן שטף האנרגיה היוצא (אנרגיה ליחידת שטח ליחידת זמן) הוא:

$$I=\frac{1}{4}c\cdot\epsilon=\frac{\pi^2k_B^4}{60\hbar^3c^2}T^4\equiv\sigma T^4$$

כאשר מגדירים: $\sigma=5.67\times10^{-8}W\,m^{-2}\,K^{-4}$ - קבוע סטפן בולצמן.

3 טמפרטורה של כוכב החשוף לקרינת השמש

נשתמש בחוק סטפן בולצמן כדי להעריך את הטמפרטורה של כוכב החשוף לקרינת השמש.

נניח שהשמש והכוכב הם גופים שחורים.

שטח הפנים של השמש: $4\pi R_S^2$. לפי חוק סטפן בולצמן, שטף האנרגיה היוצא מהשמש הוא $I=\sigma T_S^4$ (קרינה ליחידת שטח ליחידת זמן).

כאשר R_S הוא רדיוס השמש, ו-T_S היא טמפרטורת השמש.

לכן האנרגיה היוצאת מהשמש ליחידת זמן (הספק) היא: $P_S=\sigma T_S^4\cdot4\pi R_S^2$

הקרינה הנקלטת על הכוכב: $P_E^{absorbed}=P_S\cdot\left(\frac{\pi R_E^2}{4\pi d^2}\right)(1-\alpha)$

זהו הספק הקרינה הנפלט מהשמש, כפול החלק היחסי של הקרינה הפוגע בכוכב (שהוא שטח עיגול ברדיוס הכוכב חלקי פני השטח של כדור שרדיוסו הוא המרחק בין השמש לכוכב), כפול חלק הקרינה שאינו מוחזר לחלל.

R_E - רדיוס הכוכב, d - המרחק בין הכוכב לשמש, α - albedo של הכוכב = חלק הקרינה הפוגעת המוחזר לחלל

מצד שני הכוכב בעצמו הוא גוף שחור הפולט אנרגיה בהספק: $P_E^{emitted}=\sigma T_E^4\cdot 4\pi R_E^2$
כאשר T_E היא טמפרטורת הכוכב.
בשיווי משקל הספק הקרינה הנקלטת בכוכב שווה להספק הקרינה הנפלטת:

$$\begin{aligned}
P_E^{absorbed} &= P_E^{emitted} \\
P_S\cdot\left(\frac{\pi R_E^2}{4\pi d^2}\right)(1-\alpha) &= \sigma T_E^4\cdot 4\pi R_E^2 \\
\sigma T_S^4\cdot 4\pi R_S^2\cdot\left(\frac{\pi R_E^2}{4\pi d^2}\right)(1-\alpha) &= \sigma T_E^4\cdot 4\pi R_E^2 \\
T_S^4 R_S^2\cdot\left(\frac{1}{4d^2}\right)(1-\alpha) &= T_E^4
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_E=T_S\sqrt{\frac{\sqrt{1-\alpha}R_S}{2d}}}$$

לכדור הארץ והשמש:
$\alpha\cong 0.367$,$d=1.496\times 10^{11}\,m$,$R_S=6.96\times 10^8\,m$,$T_S=5778\,K$
$\Rightarrow T_E\cong 248.57\,K=-24.5\,{}^\circ C$
זוהי הטמפרטורה הנצפית מהחלל. על פני כדור הארץ, הטמפרטורה גבוהה יותר בשל אפקט החממה. ניתן להוסיף למודל את השפעת האטמוספרה ולקבל הערכה של טמפרטורת פני כדור הארץ.

4 נורת להט

נדון בנורת להט עם הספק של $100\,W$. נניח שהנורה היא גוף שחור, שקוטר התיל הוא $d\approx 0.05\,mm$, ושהאורך שלו הוא $15\,cm$.

מהי הטמפרטורה של התיל?

על פי חוק סטפן בולצמן, ההספק ליחידת שטח של הנורה שווה ל-σT^4, כלומר:

$$100=l\cdot\pi d\cdot\sigma T^4\ \Rightarrow T=\left(\frac{100}{\pi\sigma l d}\right)^{1/4}\approx 3000\,K$$

כמה מהאנרגיה נפלטת בתחום האור הנראה?

נצילות = האנרגיה שנפלטת באור נראה חלקי סך כל האנרגיה הנפלטת. נחשב אותה.

$$\text{visible light energy}=\int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} d\omega\epsilon(\omega,T)=\frac{2\pi}{h^3c^2}(k_BT)^4\int_{\frac{h\nu_{min}}{k_BT}}^{\frac{h\nu_{max}}{k_BT}}\frac{x^3}{e^x-1}dx$$

תדרי האור הנראה:

$$\begin{aligned}
\nu_{min}\approx 400\cdot 10^{12}\,Hz \quad&\Rightarrow\quad x_{min}=\frac{h\nu_{max}}{k_BT}\approx 6 \\
\nu_{max}\approx 790\cdot 10^{12}\,Hz \quad&\Rightarrow\quad x_{max}=\frac{h\nu_{min}}{k_BT}\approx 12
\end{aligned}$$

האנרגיה הכוללת הנפלטת:

$$\text{total energy} = \int_0^\infty d\omega\epsilon(\omega, T) = \frac{2\pi}{h^3c^2}(k_BT)^4 \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}dx}_{=\frac{\pi^4}{15}}$$

$\Leftarrow$ הנצילות היא $\approx 10\%$.

5 לחץ קרינה

נחשב את הלחץ של גז פוטונים.

תזכורת: עבור פוטונים יחס הדיספרסיה הוא $\omega = ck$ (האנרגיה: $\epsilon = cp = c\hbar k = \hbar\omega$), וצפיפות המצבים היא: $g(\omega) = \frac{V}{\pi^2 c^3}\omega^2$ (מכיוון ש־$\overrightarrow{k} = \frac{2\pi}{L}\vec{n}$, מחשבים את נפח הכדור במרחב ה־k עם אנרגיה קטנה מ־$\hbar\omega$ חלקי נפח מצב $(\frac{2\pi}{L})^3$).

$n(\omega) = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}$

באופן דומה לחישוב שביצענו עבור גז פרמיונים, נחשב את הלחץ ע"י חישוב הפוטנציאל הגרנד קנוני:

$$\begin{aligned} -PV &= \Omega = k_BT\int_0^\infty g(\omega)\log(1-e^{\beta\hbar\omega})d\omega = k_BT\int_0^\infty g(\omega)\log(1-e^{\beta\hbar\omega})d\omega \\ &= -k_BT\int_0^\infty \frac{\omega}{3}g(\omega)\beta\hbar n(\omega)d\omega = -\frac{1}{3}\int_0^\infty \hbar\omega g(\omega)n(\omega)d\omega = -\frac{E}{3} \end{aligned}$$

אלטרנטיבית, נתחיל מהביטוי אליו הגעתם בכיתה:

$$\frac{P}{k_BT} = -2\frac{4\pi}{h^3}\int_0^\infty dpp^2\log(1-e^{-\beta\epsilon_P})$$

נשתמש בכך ש: $\epsilon_p = \hbar\omega_p = \hbar ck = cp$ ונחליף משתנה באינטגרל מ־p ל־ϵ:

$$\begin{aligned} \frac{P}{k_BT} &= -\frac{8\pi}{h^3c^3}\int_0^\infty d\epsilon\epsilon^2\log(1-e^{-\beta\epsilon}) \\ &= -\frac{8\pi}{h^3c^3}\Big(\underbrace{\frac{1}{3}\epsilon^3\log(1-e^{-\beta\epsilon})\Big|_0^\infty}_{=0} - \frac{1}{3}\int_0^\infty d\epsilon\epsilon^3\frac{\beta e^{-\beta\epsilon}}{1-e^{-\beta\epsilon}}\Big) \\ &= \frac{8\pi\beta}{3h^3c^3}\int_0^\infty d\epsilon\epsilon^3\frac{1}{e^{\beta\epsilon}-1} \\ &= \frac{8\pi\beta}{3h^3c^3}\hbar^4\int_0^\infty d\omega\omega^3\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1} = \frac{\beta}{3}\underbrace{\frac{\hbar}{\pi^2c^3}\int_0^\infty d\omega\omega^3\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}}_{=\frac{E}{V}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{PV = \frac{1}{3}E}$$

לעומת זאת לגז פרמיונים (ולכן גם לגז קלאסי) עם יחס דיספרסיה ריבועי $\epsilon = \frac{p^2}{2m}$ ראינו בתרגול שעבר ש־$PV = \frac{2}{3}E$. הסיבה להבדל היא שיחס הדיספרסיה של פוטונים הוא ליניארי: $\epsilon = cp$.