גז בוזונים אידיאלי

2.7.15

1 קיבול החום של גז בוזונים אידיאלי

נחשב את קיבול החום של גז בוזונים אידיאלי חופשי בשלושה מימדים.
תזכורת: ראיתם בכיתה שהלחץ של גז בוזונים נתון ע"י:

$$\frac{P}{k_BT}=\begin{cases}\frac{1}{\lambda_T^3}g_{5/2}(z) & v>v_c\\ \frac{1}{\lambda_T^3}g_{5/2}(1) & v<v_c\end{cases}$$

כאשר: $g_\nu(z)\equiv\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int\limits_0^\infty\frac{x^{\nu-1}}{z^{-1}e^x-1}dx=\sum\limits_{n=1}^\infty\frac{z^n}{n^\nu}$ - פונקציות בוזה־איינשטיין (הנקראות גם polylogarithm)
$\lambda_T=\sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_BT}}$ - אורך גל תרמי.

כפי שראינו עבור גז פרמיונים עם יחס דיספרסיה $\epsilon=\frac{p^2}{2m}$, גם עבור גז בוזונים עם אותו יחס דיספרסיה מתקיים ש: $PV=\frac{2}{3}E$. לכן:

$$\epsilon=\frac{E}{N}=\frac{3}{2}Pv=\begin{cases}\frac{3}{2}\frac{k_BTv}{\lambda_T^3}g_{5/2}(z) & v>v_c\\ \frac{3}{2}\frac{k_BTv}{\lambda_T^3}g_{5/2}(1) & v<v_c\end{cases}$$

מכאן נגזור את קיבול החום:
עבור $v>v_c$,

$$\frac{C_V}{N}=\frac{\partial\epsilon}{\partial T}=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\frac{k_Bv}{\lambda_T^3}g_{5/2}(z)+\frac{3}{2}\frac{k_BTv}{\lambda_T^3}g'_{5/2}(z)\Big(\frac{\partial z}{\partial T}\Big)_v$$

חישוב $\left(\frac{\partial z}{\partial T}\right)_v$:
ראיתם בשיעור ש־$\frac{1}{v}=\frac{1}{\lambda_T^3}g_{3/2}(z)$. נשתמש בקשר זה כדי לחשב את הנגזרת:

$$\begin{aligned}g_{3/2}(z)&=\frac{\lambda_T^3}{v}\\ \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial T}}g'_{3/2}(z)\frac{\partial z}{\partial T}&=-\frac{3}{2}\frac{1}{T}\frac{\lambda_T^3}{v}\\ \Rightarrow\frac{\partial z}{\partial T}&=-\frac{3}{2}\frac{1}{T}\frac{\lambda_T^3}{v}\frac{1}{g'_{3/2}(z)}\end{aligned}$$

נחשב את $g'_{3/2}(z)$ ואת $g'_{5/2}(z)$:

$$\begin{aligned}g_{3/2}(z)&=\sum_{n=1}^\infty\frac{z^n}{n^{3/2}}\\ g'_{3/2}(z)&=\sum_{n=1}^\infty\frac{z^{n-1}}{n^{1/2}}=\frac{1}{z}g_{1/2}(z)\end{aligned}$$

באופן דומה,

$$g'_{5/2}(z) = \frac{1}{z} g_{3/2}(z)$$

נציב את הביטויים שקיבלנו בחישוב של קיבול החום ונקבל:

$$\frac{C_V}{N} = \frac{15}{4}\frac{k_B v}{\lambda_T^3} g_{5/2}(z) - \frac{9}{4} k_B \frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)}$$

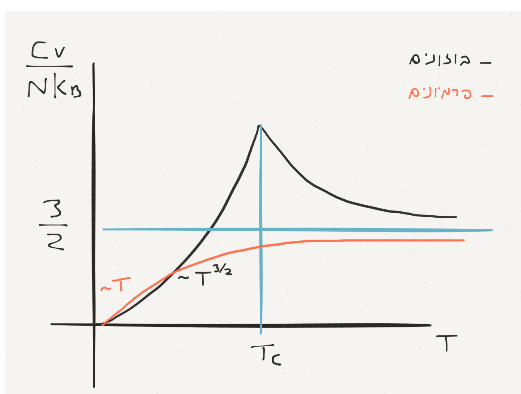
עבור צפיפות גבוהה מהצפיפות הקריטית $v < v_c$: מתקיים $z = 1$ ולכן $\frac{\partial z}{\partial T} = 0$.

$$\Rightarrow \boxed{\frac{C_V}{N} = \begin{cases} \frac{15}{4}\frac{k_B v}{\lambda_T^3} g_{5/2}(z) - \frac{9}{4} k_B \frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)} & v > v_c \\ \frac{15}{4}\frac{k_B v}{\lambda_T^3} g_{5/2}(1) & v < v_c \end{cases}}$$

מכיוון ש־$g_{1/2}(1) = \infty$, C_V רציף במעבר הפאזה.
בנקודת מעבר הפאזה $T = T_c$:

$$\frac{C_V}{N k_B}(T_c) = \frac{15}{4}\frac{v}{\lambda_T^3} g_{5/2}(1) = \frac{15}{4}\frac{g_{5/2}(1)}{g_{3/2}(1)} \approx \frac{15}{4}\frac{1.342}{2.612} \approx 2 > \frac{3}{2}$$

בטמפרטורה גבוהה $T \to \infty$: $z \to 0 \Leftarrow z \cong g_{5/2}(z) \cong g_{3/2}(z)$, $\frac{\lambda_T^3}{v} \cong z$ ולכן $\frac{C_V}{N k_B} \cong \frac{15}{4} - \frac{9}{4} = \frac{3}{2}$ (התוצאה המוכרת עבור גז קלאסי).
נשרטט את התוצאה, ונשווה אותה לקיבול החום של גז פרמיונים:



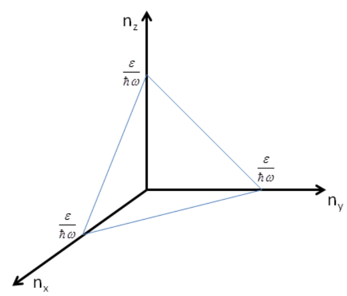
2 בוזונים בפוטנציאל הרמוני

התעבות בוזה־איינשטיין:

כדי לדעת אם במערכת נתונה מתרחשת התעבות בוזה איינשטיין (אכלוס מאקרוסקופי של מצב היסוד) בטמפרטורה גדולה מאפס, נחשב את מספר החלקיקים: $N = \int_0^\infty g(\epsilon) n(\epsilon) d\epsilon$. מבצעים החלפת משתנה כדי לקבל אינטגרל במונחים של משתנה חסר יחידות. מציבים פוטנציאל כימי שווה לרמת היסוד - כאשר רמת היסוד היא 0, מציבים $z = 1$. אם האינטגרל מתכנס, מתרחשת התעבות ב־$T_c > 0$(מכיוון שמספר החלקיקים ברמות המעוררות, אותו חישבנו באינטגרל, חסום ולכן כל שאר החלקיקים חייבים להיות ברמת היסוד). אם הוא מתבדר, אין אכלוס

מאקרוסקופי של מצב היסוד עבור $T>0$.
נוסחה שימושית לצורך קביעת התכנסות האינטגרל וחישובו: $g_\nu(1)=\zeta(\nu)$ היא פונקצית זטא של רימן, המתכנסת עבור $\nu>1$ ומתבדרת אחרת.

נעסוק בבעיה של **גז בוזונים אידיאלי בפוטנציאל הרמוני בשלושה מימדים:**
N בוזונים נתונים בפוטנציאל הרמוני תלת מימדי בטמפטורה T.
ההמילטוניאן של חלקיק בודד בפוטנציאל הרמוני: $\mathcal{H}=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2r^2$
חישוב צפיפות המצבים:
רמות האנרגיה של הבעיה הקוונטית החד חלקיקית הן $E=\hbar\omega(n_x+n_y+n_z+\frac{3}{2})$, כאשר $n_i=0,1,2,3,...$.
נסיט את האנרגיה בקבוע כך שאנרגית מצב היסוד היא אפס: $E=\hbar\omega(n_x+n_y+n_z)$. המצב הקוונטי של החלקיק מוגדר ע"י (n_x,n_y,n_z) - וקטור של 3 מספרים טבעיים.



מספר המצבים עם אנרגיה קטנה מ-ϵ שווה לנפח הפרמידה במרחב ה-n_i - כמתואר בשרטוט.
נפח הפירמידה = שטח בסיס * גובה \ 3 = $\Sigma(\epsilon)=\frac{1}{6}\left(\frac{\epsilon}{\hbar\omega}\right)^3$.
לכן צפיפות המצבים היא $g(\epsilon)=\Sigma'(\epsilon)=\frac{\epsilon^2}{2(\hbar\omega)^3}$
נראה שלמערכת הזו בטמפרטורות נמוכות מתרחשת התעבות בוזה-איינשטיין, ונמצא את הטמפרטורה הקריטית.
מספר החלקיקים:

$$\begin{aligned}N(T,z) &= \int_0^\infty g(\epsilon)n(\epsilon)d\epsilon=\frac{1}{2(\hbar\omega)^3}\int_0^\infty\frac{\epsilon^2}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}-1}d\epsilon\\ &\overset{x=\beta\epsilon}{=} \frac{(k_BT)^3}{(\hbar\omega)^3}\underbrace{\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{x^2}{z^{-1}e^x-1}dx}_{=g_3(z)}\end{aligned}$$

האינטגרל $g_3(1)$ מתכנס: $g_3(1)=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{x^2}{e^x-1}dx=\zeta(3)\approx1.2$. לכן מתרחשת התעבות בוזה-איינשטיין, והטמפרטורה הקריטית נתונה ע"י:

$$N=\frac{(k_BT_c)^3}{(\hbar\omega)^3}g_3(1)\ \Rightarrow\ T_c=\frac{\hbar\omega}{k_B}\Big(\frac{N}{g_3(1)}\Big)^{1/3}$$

מהו מספר החלקיקים ברמת היסוד כפונקציה של הטמפרטורה?
מעל הטמפרטורה הקריטית, $\frac{N_0}{N}\approx0$.
מספר החלקיקים ברמת היסוד N_0 שווה למספר החלקיקים הכולל פחות מספר החלקיקים ברמות המעוררות: $N_0=N-N_{excited}=N\left(1-\frac{N_{excited}}{N}\right)$.
עבור $T<T_c$, מספר החלקיקים ברמות המעוררות הוא $N_{excited}=N(T,z=1)$. מספר החלקיקים הכולל הוא $N=N(T_c,z=1)$ (כך מצאנו את הטמפרטורה הקריטית). לכן:

$$N_0 = \Big(1 - \frac{N(T,1)}{N(T_c,1)}\Big) = N\Big(1 - (\frac{T}{T_c})^3\Big)$$