תזכורת על הסתברות:

נסתכל על משתנים בדידים ורציפים

$P(n)$	$P(x)$ רצ.פ.
הסתברות לערך n	$P_r(x_0 \le x \le x_1) = \int_{x_0}^{x_1} P(x)\,dx$
$\sum_n P(n) = 1$	$\int_{-\infty}^{\infty} P(x)\,dx = 1$

תוחלת (ממוצע)

$\langle n \rangle = \sum_n P(n)\cdot n$	$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} P(x)\cdot x\,dx$

שונות (Variance):

$\sigma_n^2 = \langle (n-\langle n\rangle)^2 \rangle = \sum P(n) n^2 - \langle n \rangle^2$	$\sigma_x^2 = \langle (x-\langle x\rangle)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} P(x) x^2\,dx - \langle x \rangle^2$

סטיית תקן σ_n σ_x

דוגמא להתפלגות:

$$P(n)=\begin{cases}\frac{1}{L} & 1\leq n\leq L\\ 0 & else\end{cases}$$ אחידה

נקרא מומנט ראשון $$\sum_{n=1}^{L} nP(n)=\frac{1}{L}\sum_{n=1}^{L} n=\frac{1}{L}\cdot\frac{a_n+a_1}{2}=\frac{L+1}{2}$$

נקרא מומנט שני $$\sum n^2P(n)=\frac{1}{L}\sum_{n=1}^{L} n^2=\frac{1}{L}\cdot\left(\frac{L}{6}(1+L)(1+2L)\right)$$

$$=\frac{1}{6}(1+L)(1+2L)$$

$$\sigma^2=\langle n^2\rangle-\langle n\rangle^2=\frac{1}{6}(L+1)(1+2L)-\frac{1}{4}(1+L)^2$$

$$=\frac{1}{2}(L+1)\left(\frac{2L+1}{3}-\frac{L+1}{2}\right)=\frac{1}{2}(L+1)\left(\frac{L}{6}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{12}(L^2-1)$$

$$\mu\simeq\frac{L}{2}\qquad\sigma^2\simeq\frac{1}{12}L^2$$ בקירוב (גדול) תוצאה דומה

קצת על מספר: התפלגות נורמלית (גאוסיאנית)

$$P(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{Z}\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\langle x\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}x\,P(x)=\underbrace{\frac{1}{Z}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}_{=0}+\frac{1}{Z}\int_{-\infty}^{\infty}\mu\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

פונקציה אי-זוגית סביב $x=\mu$

$$=\mu\cdot\int_{-\infty}^{\infty}P(x)=\mu$$

$$\langle x^2\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\,P(x)=\frac{1}{Z}\int(x-\mu)^2\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}+\mu\int(x-\mu)\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\mu^2\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}=\sigma^2+\mu^2$$

$$\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2=\sigma^2$$

משפט הגבול המרכזי:

משתנים מקריים בלתי תלויים i.i.d's $X_1, X_2, \dots X_N$

$\mu = \langle X_i \rangle \qquad \sigma^2 = \langle x_i^2 \rangle - \langle x_i \rangle^2$

For $N \gg 1$ $\quad P\left(x = \frac{\sum x_i}{N}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi \tilde{\sigma}^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\tilde{\sigma}^2}}$

גאוסיין הולך ונהיה צר כמו $\sqrt{N}$ $\longrightarrow \tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$

דוגמא 3: חלקיקים במיכל

q מס' חלקיקים בשליש השמאלי

$X_i = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} P(x_i=1) = \frac{1}{3} \\ P(x_i=0) = \frac{2}{3} \end{matrix}$

$\mu = \langle x_i \rangle = 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$\langle x_i^2 \rangle = 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$\sigma^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$

$P\left(q = \frac{\sum x_i}{N}\right) \approx \frac{1}{N\sqrt{\frac{4\pi}{9}}} \cdot e^{-N\left(q - \frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{9}{4}}$

ננסה לחשב במדויק:

$$P(Q) = \binom{N}{Q}\left(\frac{1}{3}\right)^{Q}\left(\frac{2}{3}\right)^{N-Q} = \frac{Q!}{N!(Q-N)!}\cdot\ \ldots$$

קירוב סטירלינג

$$N! = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi N}}}_{1} e^{N\ln N - N}$$

זה לרוב
לא חשוב

$$P(Q) = Ce^{N\ln N - \cancel{N} - Q\ln Q - \cancel{Q} - (N-Q)\ln(N-Q) \cancel{-(N-Q)}}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{Q}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{N-Q}$$

$$= Ce^{\cancel{N\ln N} - Q(\ln q + \cancel{\ln N}) - (N-Q)[\ln(1-q) + \cancel{\ln N}]}$$

$$= Ce^{N\left[-q\ln q - (1-q)\ln(1-q) + q\ln\frac{1}{3} + (1-q)\ln\frac{2}{3}\right]}$$

$$= C\cdot e^{Nf(q)} = P(q)$$

$$\frac{\partial f}{\partial q} = -\ln q + \ln(1-q) + \ln\frac{1}{3} - \ln\frac{2}{3} = 0$$

$$q^* = \frac{1}{3}$$ מקסימום

$$\left.\frac{\partial f}{\partial q}\right|_{q^*} = -\frac{1}{q^*} - \frac{1}{1-q^*} = -3 - \frac{3}{2} = -\frac{9}{2}$$

נפתח סביב המקסימום

$$f(q) = f\left(\tfrac{1}{3}\right) + \frac{\partial f}{\partial q}\Big|_{1/3}\left(q-\tfrac{1}{3}\right) + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial q^2}\Big|_{1/3}\left(q-\tfrac{1}{3}\right)^2 + \dots$$

$$= f\left(\tfrac{1}{3}\right) - \frac{9}{4}\left(q-\tfrac{1}{3}\right)^2$$

$$P(q) \simeq \underbrace{C \cdot e^{Nf\left(\frac{1}{3}\right)}}_{\text{קבוע נרמול}} \cdot e^{-\frac{9}{4}N\left(q-\frac{1}{3}\right)^2} \Rightarrow$$

מתאים למשפט הגבול המרכזי

$X_1, \dots, X_N$ בלתי תלויים [illegible] לכלל

$$P\left(\frac{\sum X_i}{N}\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{\sigma}^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\tilde{\sigma}^2}} \qquad \tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

[illegible] תמונה את $f(q)$ וגם הקירוב