



האולימפיאדה הארצית ע"ש פרופ' גיליס ה'תשפ"ה

נהלים:

משך הבחינה הוא 5 שעות. יש להוכיח כל טענה ולנמק הכל באופן מלא.
אין להשתמש במחשבון. יש לציית להוראות המשגיחים.

1. יהי n שלם חיובי. במעגל רשומות n אותיות, כל אחת מהן היא A , B או C . כאשר קוראים את האותיות במעגל עם כיוון השעון, הרצף AB מופיע 100 פעמים, הרצף BA מופיע 99 פעמים, והרצף BC מופיע 17 פעמים. כמה פעמים הרצף CB מופיע?

2. נתון מעוין $ABCD$. נבחרו שמונה נקודות נוספות $X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2, W_1, W_2$ כך שהמרובעים $AX_1BX_2, BY_1CY_2, CZ_1DZ_2, DW_1AW_2$ הם ריבועים. הראו כי שמונה הנקודות החדשות נמצאות על שני ישרים.

3. בארט רשם 2024 פעמים את הספרה "1" בשורה. לאחר מכן ליסה רושמת עוד 2024 ספרות מימין לספרות שבארט רשם, כך שהמספר שמתקבל הוא ריבוע של מספר שלם. מצאו את כל האפשרויות לספרות שליסה הייתה יכולה לרשום.

4. נתון שולחן מלבני בגודל $100 \times \sqrt{3}$. מה היא הכמות המינימלית של מפיות עגולות עם רדיוס 1 שדרושה בשביל לכסות את השולחן?
הערה: מותר למפיות לעלות זו על זו ולצאת מחוץ לגבולות השולחן.

5. בנהר מתגוררות להן 2024 לוטרות. חלקן חברות זו של זו. האם יתכן שלכל 1012 לוטרות קיימת לוטרה נוספת, אחת בדיוק, שהיא חברה של כל 1012 הלוטרות?

6. נתונים a, b, c ממשיים חיוביים עבורם מתקיים ש- $ab + bc + ca + abc = 4$. הראו כי:

$$\sqrt{\frac{ab + ac + 1}{a + 2}} + \sqrt{\frac{bc + ca + 1}{b + 2}} + \sqrt{\frac{ca + cb + 1}{c + 2}} \leq 3$$

7. לכל n שלם חיובי נדיר את הקבוצה A_n של רביעיות סדורות (a, b, c, d) של מספרים שלמים, שמקיימות את התנאים הבאים: $0 \leq a \leq c \leq n, 0 \leq b \leq d \leq n$ וגם $c + d > n, bc = ad + 1$.

נגדיר

$$\alpha_n = \sum_{(a,b,c,d) \in A_n} \frac{1}{ab + cd}$$

כאשר הסכום נלקח על כל הרביעיות (a, b, c, d) ב- A_n . מצאו את כל המספרים הממשיים t עבורם $\alpha_n > t$ לכל n שלם חיובי.

בהצלחה!

