



האולימפיאדה הארצית ע"ש פרופ' גיליס ה'תשפ"ו

נהלים:

משך הבחינה הוא 5 שעות.
יש לציית להוראות המשגיחים.
יש להוכיח כל טענה ולנמק הכל באופן מלא.
אין להשתמש במחשבון.

1. נתון מספר חיובי x המקיים את המשוואה:

$$\frac{x^3 - [x]^3 - \{x\}^3}{x^2 - [x]^2 - \{x\}^2} = 2.025$$

מצאו את x .

הערה: $[x]$ מסמן את הערך השלם של x , ו- $\{x\}$ מסמן את הערך השברי של x .
לדוגמה, אם $x = 57.86$ אז $[x] = 57$ ו- $\{x\} = 0.86$.

2. הקוד לדלת בבית של איילה הוא בעל N ספרות עשרוניות. כאשר הקוד הנכון מוזן, הדלת נפתחת. הקוד מתנקה אוטומטית כאשר מזינים N ספרות, אבל לאיילה אין דרך לדעת שזה קרה (אין חיווי לכמות הספרות המוזנות).

כרגע, יש כמות לא ידועה של ספרות שכבר הוזנו (הן לאו דווקא תואמות את הקוד של איילה). איילה יודעת את הקוד לדלת ורוצה לפתוח את הדלת. מה כמות הספרות המינימלית שהיא תצטרך להקליד, ללא תלות בקוד ובספרות שהוקלדו מראש?

דוגמה: נניח שהקוד לדלת של איילה הוא 123, ומראש הוזנה הספרה 1. אם איילה תנסה להזין 123 – הדלת לא תפתח. אבל, אם היא תזין 94123 – הדלת תפתח.

3. מצאו את כל השלמים החיוביים n , עבורם קיים שלם אי-זוגי m , כך ש- $2^{n-1} \leq m \leq 2^n$ וגם

$$2^{2n} - 2^n m + m^2$$

הוא ריבוע של מספר שלם.



4. יהא משולש ABC ויהא ℓ קטע האמצעים של המשולש שמקביל לצלע BC . הישרים דרך A המקבילים לחוצי הזוויות של $\angle B$ ו- $\angle C$ נחתכים עם ℓ בנקודות E ו- F בהתאמה. עקב האנך מ- E לישר AB יסומן ב- X , ועקב האנך מ- F לישר AC יסומן ב- Y . הראו כי

$$AX + AY = BX + BC + CY$$

5. מצאו את כל הפתרונות הממשיים החיוביים עבור מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} 9a(\sqrt[3]{bc} - 1) = c(3d + c) \\ 9b(\sqrt[3]{cd} - 1) = d(3d + a) \\ 9c(\sqrt[3]{da} - 1) = a(3b + a) \\ 9d(\sqrt[3]{ab} - 1) = b(3b + c) \end{cases}$$

6. יהא n שלם חיובי. בתחילת התהליך, על הלוח רשומים מספרים ממשיים $a_1, a_2, \dots, a_n$. בכל מהלך, המספרים על הלוח מוחלפים ב- n המספרים:
 $a_i - \operatorname{sgn}(a_1) - \dots - \operatorname{sgn}(a_{i-1}) - \operatorname{sgn}(a_{i+1}) - \dots - \operatorname{sgn}(a_n)$
לכל $1 \leq i \leq n$.

לאחר השלב ה- i , מחשבים את המספר

$$b_i := \operatorname{sgn}(a_1) + \operatorname{sgn}(a_2) + \dots + \operatorname{sgn}(a_n)$$

הראו כי הסדרה $b_1, b_2, \dots$ מחזורית החל ממקום מסוים.

תזכורת: הפונקציה $\operatorname{sgn}(x)$ מוגדרת באופן הבא:

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1 & \text{אם } x > 0 \\ -1 & \text{אם } x < 0 \\ 0 & \text{אם } x = 0 \end{cases}$$

7. מצאו את כל הסדרות של מספרים שלמים חיוביים, עבורן לכל m, n שלמים חיוביים, מתקיימים שני התנאים:

$$m - n \mid a_m - a_n, \quad a_n \mid a_{mn}$$

בהצלחה!