<u>פתרונות תחרות גיליס</u>

<u>2020</u>

1. סופי רשמה על הלוח את כל המספרים מ-1 עד 1000 (כולל).

א. איזו ספרה רשמה סופי על הלוח הכי הרבה פעמים?

ב. איזו ספרה רשמה סופי על הלוח הכי מעט פעמים?

פתרון:

סופי רשמה את הספרה 1 הכי הרבה פעמים, ואת הספרה 0 הכי מעט.

חוץ מהמספר 1000, כל מספר שסופי רשמה נבנה משלוש ספרות בסדר כלשהו (אם המספר קטן מ-100 "נרפד באפסים, כלומר נדמיין שהיא רשמה 001), ולכל בחירה של שלוש ספרות מתאים מספר, כמות הפעמים שספרה מופיעה שווה לכמות הפעמים שבחרנו את הספרה הזו, חוץ מאפס שמדי פעם למרות שבחרנו הוא לא נכתב.

אם כן, עד 999 כל הספרות חוץ מאפס הופיעו אותה כמות של פעמים, ואפס הופיע אפילו פחות, לכן מכיוון שרשמנו את 1000 הספרה 1 מופיע פעם אחת יותר. הספרה 0 הופיעה עד 999 פחות מכולם, וביותר מ-3 (למשל כי ב-1,2, כבר שאר הספרות מקבלות יתרון של 4 על אפס), ולכן גם אם נוסיף את 1000 היא עדיין הופיעה הכי מעט פעמים.

2. האם קיימת סידרה של מספרים ראשוניים (חיוביים) p_n המקיימת:

- **$p_{n+1} = 2p_n + 1$**

פתרון:

תשובה: לא

הסבר: נניח בשלילה, שיש סדרה כזאת. בגלל ש p_1 ראשוני נקבל:

$p_1 > 1$.

לכן $p_2 > 3$.

נסמן $p := p_2$.

נסמן

$q_n = p_n + 1$.

נקבל:

$q_{n+1} = 2q_n$.

לכן

$q_{2+k} = 2^k \bmod p$.

לפי המשפט הקטן של פרמה זה גורר ש:

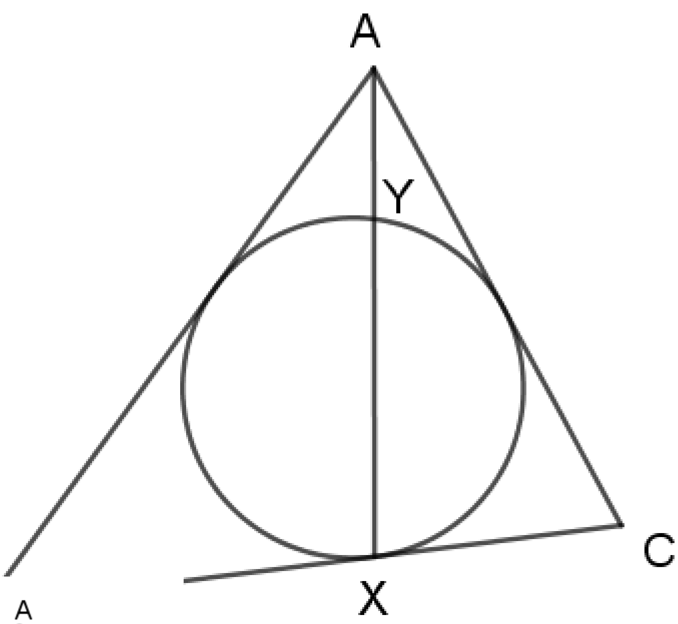
$q_{2+p} = 1 \bmod p$.

לכן:

$p_{2+p} = 0 \bmod p$.

אבל $p_{2+p} > p$. זה סותר את העובדה ש p ראשוני.

3. במשולש ABC ציירו מעגל חסום, X היא נקודת ההשקה שלו עם הקטע BC, Y היא נקודת החיתוך השנייה של הקטע AX עם המעגל החסום. הוכיחו ש:

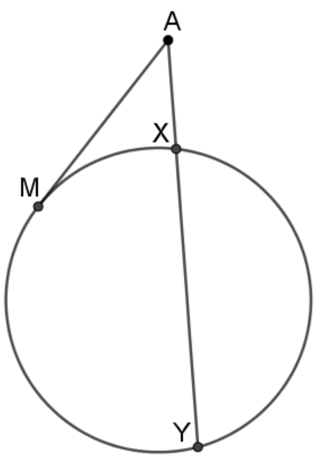


$$\boldsymbol{AX + AY + BC > AB + AC}$$

פתרון:

נתחיל מלהזכיר למה, אותה נוכיח אחר כך.

למה. נתון מעגל, ונקודה מחוץ לו A, מעבירים קרן דרך A שחותכת את המעגל בX, Y , בנוסף נעביר משיק מ-A למעגל, שמשיק ב-M (ראו ציור), אז מתקיים:



$$AX \cdot AY = AM^2$$

המכפלה מהלמה נקראת דרגת הנקודה, אנחנו בפרט מסיקים את הטענה הידועה שאורכי המשיקים מנקודה שווים.

נחזור לשאלה, אם נסמן את נקודות ההשקה של המעגל החוסם לקטעים AB ו-AC ב-M, N בהתאמה, אז מכיוון שמשיקים מנקודה שווים, אנחנו יודעים ש-$BN = BX$ ו-$CM = CM$, לכן:

$$BC = BX + XC = BN + CM$$

לעומת זאת:

$$AB + AC = AN + NB + AM + MC$$

לכן האי-שוויון שיש להוכיח הוא:

$$AN + AM < AX + AY$$

עכשיו אנחנו יודעים ש-$AN = AM$ כי אילו משיקים, נסמן $AX = x, AY = y, AN = AM = z$, אנחנו יודעים מהלמה ש:

$$xy = z^2$$

ואנחנו רוצים להוכיח ש:

$$x + y > 2z$$

נעלה את האי-שוויון בריבוע (מותר כי שני הצדדים חיוביים), נקבל שצריך להוכיח ש:

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 > 4z^2 = 4xy$$

$$x^2 - 2xy + y^2 > 0$$

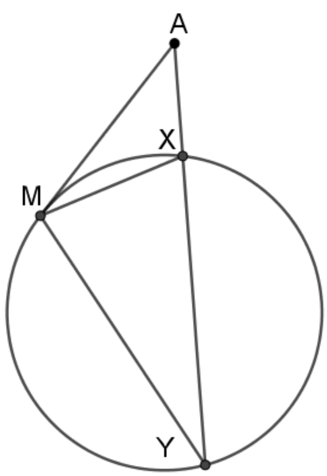
$$(x - y)^2 > 0$$

וזה נכון כל עוד $x \neq y$, וזה בבירור לא המצב.

הערה: יכולנו לסיים בקצרה יותר בעזרת אי-שוויון הממוצעים שאומר שלכל זוג מספרים חיוביים:

$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

למעשה מה שעשינו היה בדיוק הוכחה שלו.



הוכחת הלמה:

לפי זווית בין משיק למיתר נקבל:

$$\angle AMX = \angle MYX$$

בנוסף ברור ש:

$$\angle MAX = \angle MAY$$

על כן המשולשים ΔAMX ו-ΔAYM דומים, בפרט:

$$\frac{AY}{AM} = \frac{AM}{AX}$$

$$AX \cdot AY = AM^2$$

וסיימנו.

4. דני מתלהב ממספרים בעלי שבע ספרות שלא כוללים את הספרה 0 ושיש להם את התכונה הבאה: ספרת האחדות של המספר מתחלקת בספרה העשרות שלו, ספרת העשרות מתחלקת בספרת המאות וכן הלאה.
לדוגמא, דני מתלהב מהמספר 1133366 אבל לא מהמספר 9999993.
האם כמות המספרים מהם דני מתלהב מתחלקת ב-7?

פתרון:

התשובה היא לא.

נתבונן במספר שדני מתלהב ממנו, נסמן את הספרה הראשונה שלו ב-a, הספרה השנייה מתחלקת בספרה הראשונה ולכן ניתן לרשום אותה כ-$a \cdot b$, את הספרה השלישית נרשום כ-$a \cdot b \cdot c$ וכך הלאה, הספרות של המספר יהיו:

$$a, ab, abc, abcd, abcde, abcdef, abcdefg$$

נשים לב שהמספר נקבע ביחידות מהמנות העוקבות בין הספרות שלו, כלומר בקום לרשום את כל הספרות $(a, ab, \dots, abcdefg)$ אנחנו יכולים לרשום רק את המנות בין הספרות העוקבות: (a, b, c, d, e, f, g) וזה יחיל בדיוק את אותו המידע (אנחנו חושבים שלפני הספרה הראשונה רשום 1 ולכן המנה הראשונה שווה לספרה הראשונה).

נשים לב שאת הרשימה של המנות העוקבות אנחנו יכולים לסובב, כלומר בהינתן השביעיה (a, b, c, d, e, f, g) של מנות עוקבות אנחנו יכולים לבנות את השביעיה (b, c, d, e, f, g, a) ואז את השביעיה (c, d, e, f, g, a, b) וכך הלאה עד השביעיה (g, a, b, c, d, e, f) כלומר בהינתן שביעיה של מנות עוקבות אנחנו יכולים לבנות עוד שש שביעיות של מנות עוקבות.

לדוגמה בהינתן המספר 1222224 המנות העוקבות שלו הן $(1,2,1,1,1,1,2)$, ששת השביעיות האחרות הן $(2,1,1,1,1,2,1), (1,1,1,1,2,1,2), (1,1,1,2,1,2,1)$, $(1,1,2,1,2,1,1), (1,2,1,2,1,1,1), (2,1,2,1,1,1,1)$
והמספרים המתאימים למנות האלו הם $2222244, 1111224, 1112244$, $1122444, 1224444, 2244444$.

מכל מספר שדני מתלהב ממנו הצלחנו לבנות עוד שש מספרים שדני מתלהב מהם כלומר הצלחנו לפרק את המספרים המלהיבים לשביעות, בשביל סיים את השאלה עלינו לבדוק האם כל המספרים שבנינו שונים זה מזה. ראשית ברור ששתי שביעות שונות נותנות מספרים שונים (כיוון שאם היו נותנות מספרים זהים, הספרה הגדולה זהה ולכן המספר הראשון בשביעה שווה ואז גם השני וכך הלאה וכל המספרים בשביעיות היו שווים).

נשאר לבדוק באילו מקרים סיבוב של שביעת מספרים נותן את אותה השביעיה. אם סובבנו ב-k אז הספרה הראשונה עברה לספרה ה-$k+1$, הספרה ה-$k+1$ עברה לספרה ה-$2k+1$ וכך הלאה ולכן כל הספרות $1, k+1, 2k+1, \ldots, 6k+1$ (כמובן שכל האינדקסים נספרים מודולו 7) זהות אבל מפני ש-7 הוא מספר ראשוני קיבלנו שבעצם כל הספרות צריכות להיות זהות ובצב זה ברור שכל שבעת הסיבובים שלנו נותנים רק מספר אחד במקום שבעה מספרים שונים.
נשאר לשים לב שאם כל המספרים בשביעיה זהים אז ספרות של המספר המתאים הן $a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7$ אבל אם $a \geq 2$ אז $a^7 > 10$ ולכן a^7 לא יכול להיות ספרה של מספר ולכן יש רק מספר אחד מהסוג הנ"ל שהוא 1111111.
סך הכל חילקנו את המספרים המלהיבים לקבוצות של שבעה מספרים והמספר 1111111 ולכן כמות המספרים המלהיבים את דני לא מתחלקת ב-7.

5. פתרו את המשוואה:

$(2a+1)(2a^2+2a+1)(2a^4+4a^3+6a^2+4a+1)=828567056280801$**, כאשר** a **מספר חיובי.**

תשובה. $a=100$.

פתרון. נסמן $b=a+1$. אז $b-a=1$, ואת הנוסחה הנתונה אפשר לשכתב בצורה

$$(b+a)(b^2+a^2)(b^4+a^4)=828567056280801$$

אם נכפיל את האגף השמאלי ב- $b-a$ נקבל

$$(b-a)(b+a)(b^2+a^2)(b^4+a^4)=(b^2-a^2)(b^2+a^2)(b^4+a^4)=$$
$$=(b^4-a^4)(b^4+a^4)=b^8-a^8$$

אז המשוואה היא בעצם $b^8-a^8=828567056280801$,

או במילים אחרות $(a+1)^8-a^8=828567056280801$.

בשביל ההמשך נרצה נוסחה ל- $(x+y)^8$, ולשם כך נרשום 8 שורות של משולש פסקל

								1								
							1		1							
						1		2		1						
					1		3		3		1					
				1		4		6		4		1				
			1		5		10		10		5		1			
		1		6		15		20		15		6		1		
	1		7		21		35		35		21		7		1	
1		8		28		56		70		56		28		8		1

מכאן די ברור כי $(100+1)^8-100^8=828567056280801$.

לכן 100 זה תשובה אפשרית. אבל מהביטוי המקורי של אגף שמאל רואים שלמשוואה יכול להיות רק פתרון אחד, כי כמה ש- a יותר גדול, כך האגף השמאלי יותר גדול. לכן 100 זה פתרון יחיד.

6. בתחרות טניס השתתפו 21 שחקנים, כל שני שחקנים שיחקו משחק אחד נגד השני ואחד מהם ניצח (אין תיקו). מארגני התחרות גילו שכל שחקן ניצח לפחות ב-9 משחקים, והפסיד לפחות ב-9 משחקים. כאשר הם ניסו למצוא את המנצחים, הם גילו שלפעמים היו שלושה שחקנים כך שא' ניצח את ב', ב' ניצח את ג', וג' ניצח את א', הם קראו לשלשות כאלה בעייתיות.

א. מה הכמות המקסימלית של שלשות בעייתיות שיכולות להיות?

ב. מה הכמות המינימלית של שלשות בעייתיות שיכולות להיות?

פתרון: נספור תחילה את כמות השלשות הלא בעייתיות בתחרות כללית.

נשים לב כי בכל שלשה לא בעייתית אחד השחקנים ניצח את השניים האחרים בשלשה ולכן ניתן לספור את כמות השלשות הלא בעייתיות דרך האנשים המנצחים בשלשות: לכל אחד מהמשתתפים נבחר שני משתתפים אחרים שהוא ניצח, כפי שאמרנו, לכל שלשה לא בעייתית מתאימה בחירה כזו וברור שגם לכל בחירה כזו מתאימה שלשה לא בעייתית. לפיכך, אם נסמן ב-w_i את כמות הניצחונות של המשתתף ה-i, כמות השלשות הלא בעייתיות היא

$$\sum_i \binom{w_i}{2}$$

כמות השלשות הכוללת בתחרות היא כמובן $\binom{21}{3}$ ולכן כמות השלשות הבעייתיות היא:

$$\binom{21}{3} - \sum_i \binom{w_i}{2}$$

ברור שכל שחקן ערך 20 משחקים, בנוסף ידוע כי כל שחקן ניצח לפחות ב-9 משחקים והפסיד לפחות ב-9 משחקים, כלומר כל שחקן ניצח ב-9,10 או 11 משחקים. כמובן שכמות הניצחונות הכוללת שווה לכמות ההפסדים הכוללת ולכן לכל שחקן עם 9 ניצחונות יש שחקן עם 11 ניצחונות. נסמן ב-a את כמות המשתתפים עם 10 ניצחונות וב-b את כמות האנשים עם 9 ניצחונות לכן בתחרות שלנו כמות השלשות הבעייתיות היא

$$\binom{21}{3} - a\binom{10}{2} - b\left(\binom{9}{2} + \binom{11}{2}\right)$$

נשים לב ש-

$$\binom{9}{2}+\binom{11}{2}=\frac{9\cdot 8+11\cdot 10}{2}=\frac{182}{2}>\frac{180}{2}=2\binom{10}{2}$$

ולכן כמות השלשות הבעייתיות מקסימלית כאשר $a=21$ ואז יש

$$\binom{21}{3}-21\binom{10}{2}=\frac{21\cdot 20\cdot 19}{6}-21\cdot 45=1330-945=385$$

שלשות בעייתיות.

לעומת זאת כמות השלשות המינימלית מתקבלת כאשר $a=1$ ו-$b=10$ ואז יש

$$\binom{21}{3}-1\binom{10}{2}-10\left(\binom{11}{2}+\binom{9}{2}\right)=1330-45-10\cdot 91=375$$

שלשות בעייתיות.

נשאר לבנות דוגמאות לחסמים שראינו: בשביל הכמות המקסימלית נסדר את כל השחקנים במעגל ונכריז כי כל שחקן מנצח את עשרת השחקנים הבאים אחריו במעגל ומפסיד לעשרת השחקנים הנמצאים לפניו במעגל, כך כל שחקן מנצח בדיוק 10 משחקים.

בשביל הכמות המינימלית של שלשות בעייתיות נשנה טיפה את הדוגמה הקודמת שלנו: נחליף את התוצאה במשחקים בין השחקן הראשון והשני במעגל, השלישי והרביעי, החמישי והשישי,..., השחקן ה-19 והשחקן ה-20. במצב הזה כל שחקן במקום זוגי ינצח 11 פעמים, כל שחקן במקום אי-זוגי ינצח 9 פעמים, למעט השחקן במקום ה-21 שהוא ינצח 10 פעמים.

7. נתון משולש ABC. המעגל ω שמרכזו I משיק בנקודות D,E,F לצלעות BC,AC,AB בהתאמה. כשמסובבים את המשולש ABC ב- 180° סביב הנקודה I, מתקבל המשולש A'B'C'. הקטעים AD ו-B'C' נחתכים בנקודה U, הקטעים BE ו-A'C' נחתכים בנקודה V, והקטעים CF ו-A'B' נחתכים בנקודה W.

הקטע BC חותך את הקטעים A'C' ו-A'B' בנקודות D_1 ו- D_2 בהתאמה,

הקטע AC חותך את הקטעים A'B' ו-B'C' בנקודות E_1 ו- E_2 בהתאמה,

והקטע AB חותך את הקטעים B'C' ו-A'C' בנקודות F_1 ו- F_2 בהתאמה.

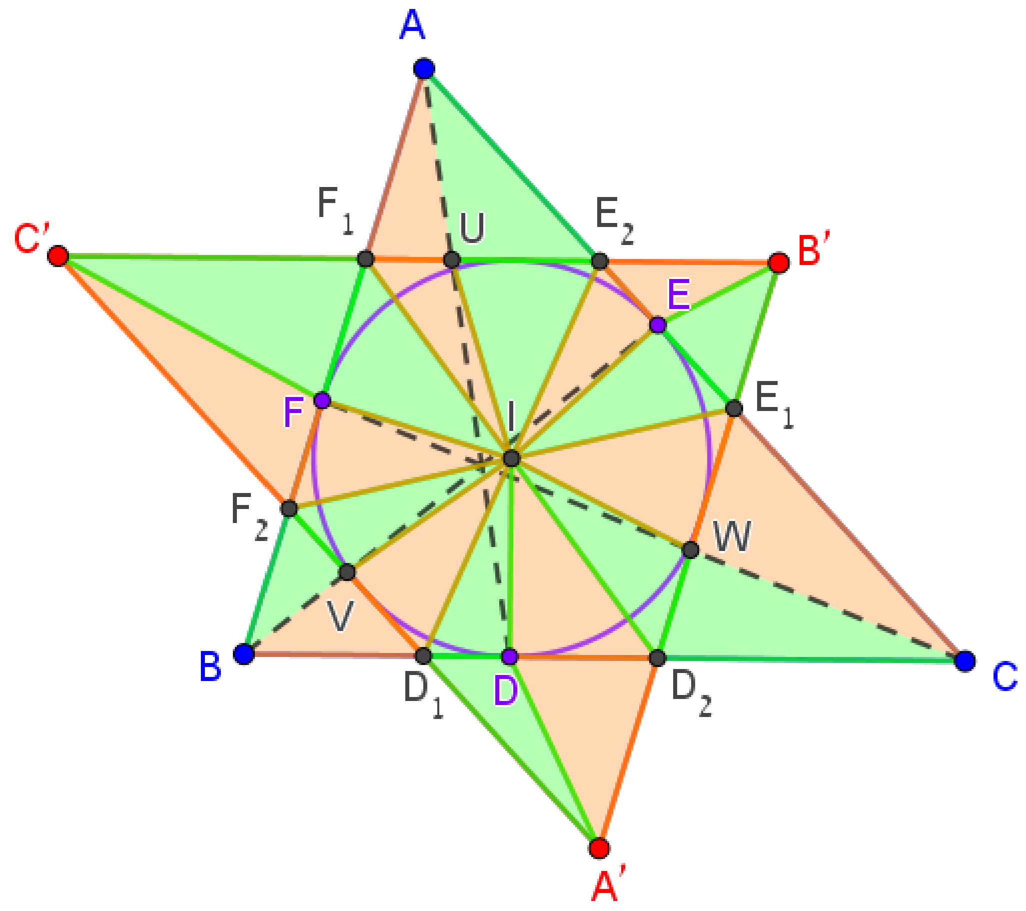
שישה מרובעים (לאו דווקא קמורים) נצבעו בכתום:

$AUIF_1,\ C'FIF_2,\ BVID_1,\ A'DID_2,\ CWIE_1,\ B'EIE_2$

שישה מרובעים נוספים (לאו דווקא קמורים) נצבעו בירוק:

$AUIE_2,\ C'FIF_1,\ BVIF_2,\ A'DID_1,\ CWID_2,\ B'EIE_1$

הראו שסכום השטחים הירוקים שווה לסכום השטחים הכתומים.



פתרון. אנו נוכיח נשתמש ב-

טענה 1. $DD_2 = UE_2$, וגם $DD_1 = UF_1$.

נוכיח את הטענה בסוף.

נסמן ב- r את רדיוס המעגל החסום ω. נשים לב כי אורך הגובה מ-I לישר D_1DD_2 שווה ל- r ושווה לאורך הגובה מ-I לישר E_2UF_1. מכאן ומהטענה מתקבל כי

$$S_{IDD_1}=\frac{DD_1\cdot r}{2}=\frac{UF_2\cdot r}{2}=S_{IUF_2} \text{ וגם } , S_{IDD_2}=\frac{DD_2\cdot r}{2}=\frac{UE_2\cdot r}{2}=S_{IUE_2}$$

גם הגובה מ-A לישר E_2UF_1 שווה לגובה מ-'A לישר D_1DD_2, הרי ניתן להעביר את הראשון לשני באמצעות סיבוב ב- 180°, ונסמן את האורך של כל אחד מבין שני הגבהים ב- h. מכאן ומהטענה נקבל

$$S_{A'DD_1}=\frac{DD_1\cdot r}{2}=\frac{UF_2\cdot r}{2}=S_{AUF_2} \text{ וגם } , S_{A'DD_2}=\frac{DD_2\cdot r}{2}=\frac{UE_2\cdot r}{2}=S_{AUE_2}$$

נחבר את המשוואות שקיבלנו בזוגות (את השורה האחרונה אם השורה שהייתה לפני):

$$S_{A'DID_1}=S_{AUIF_2} \text{ וגם } , S_{A'DID_2}=S_{AUIE_2}$$

כלומר מרובע כתום שווה למרובע ירוק שנמצא ממול. באופן דומה לחלוטין ניתן להוכיח לכל מרובע ולכן סכום השטחים הירוקים שווה לסכום השטחים הכתומים.

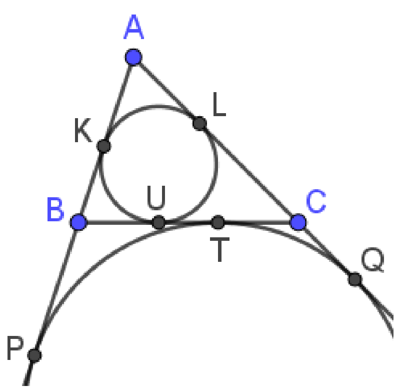
נותר להוכיח את הטענה.

הוכחת הטענה. הומותטיה אם מרכז A שמעבירה את הנקודות B ו-C לנקודות F_1 ו- E_2 בהתאמה, מעבירה את D ל-U ואת המעגל ω למעגל החסום של AF_1E_2. לכן הנקודה U היא נקודת ההשקה של המעגל החסום של המשולש AF_1E_2 עם הצלע F_1E_2.

סיבוב ב- 180° סביב I מעביר את הנקודות D_1, D, D_2 לנקודות E_2, T, F_1 בהתאמה, כאשר T היא נקודת ההשקה של ω אם הקטע F_1E_2.

היינו רוצים להוכיח כי $DD_1=UF_1$, זה כמו להוכיח כי $DD_1=TE_2$.

מה שמסיים את ההוכחה זה ליישם את הטענה הבעה עבור המשולש AF_1E_2.



טענה 2. המשולש ABC מעגל חסום משיק לצלע BC בנקודה U ומעגל חסום מבחוץ משיק לצלע BC בנקודה T (ומשיק גם להמשכי AB ו-AC).
אזי $BU=CT$.

הוכחת טענה 2. ניתן סימונים לנקודות ההשקה של שני המעגלי לצלעות והמשכי הצלעות כמו בציור.

נשתמש מספר פעמים הכך, ששני משיקים למעגל מאותה הנקודה שווים. לכן

$$2 \cdot BU = BU + BK = (BU + BK + AK + AL + CL + CU) - 2 \cdot AL - 2 \cdot CL =$$

$$= (AB + BC + CA) - 2 \cdot AC = (AB + BT + TC + CA) - 2 \cdot AC =$$

$$= (AB + BP + QC + CA) - 2 \cdot AC = (AP + AQ) - 2 \cdot AC =$$

$$= 2 \cdot AQ - 2 \cdot AC = 2 \cdot CQ = 2 \cdot CT$$