1. במעגל יושבים n אנשים, כל אחד מהם הוא שקרן או דובר אמת. האנשים מסתכלים למרכז המעגל. שקרן תמיד משקר, ודובר אמת תמיד אומר אמת. כל אחד מהאנשים יודע בדיוק מי דובר שקר ומי דובר אמת. כל אחד מהאנשים אומר שהאיש שיושב שני מקומות לשמאלו (זאת אומרת ליד האיש שיושב לידו), הוא דובר אמת. ידוע שבמעגל יש לפחות שקרן אחד, ולפחות דובר אמת אחד.

א. האם ייתכן ש-$n = 2017$?

ב. האם ייתכן ש-$n = 5778$?

פתרון:

נבחר מספור של האנשים על ידי בחירת אדם דובר אמת כלשהו (הוא בהכרח קיים לפי נתוני השאלה), ניתן לו את המספר 1, את האדם לשמאלו נמספר ב-2, וכך הלאה עד שנגיע לאדם ה-n שלשמאלו יושב האדם ה-1. כיוון שדוברי האמת אומרים רק אמת, נסיק כי שני מקומות לשמאל המקום בו יושב דובר אמת יושב גם כן דובר אמת. כיוון ששקרנים משקרים תמיד, נסיק כי שני מקומות לשמאל המקום בו יושב שקרן יושב גם כן שקרן (שקרנים טוענים שיושב שם דובר אמת – אך הם משקרים).

כעת, כיוון שהאדם שמוספר ב-1 הינו דובר אמת, כל האנשים שמסומנים במספרים אי-זוגיים דוברי אמת. אם גם האדם שמוספר ב-2 דובר אמת, נקבל שכל האנשים שמסומנים במספרים זוגיים דוברי אמת, כיוון שאנו יודעים שישנו שקרן אחד במעגל, דבר זה לא יכול לקרות ועל כן אדם מספר 2 הוא שקרן, וכך גם כל האנשים שמוספרו במספרים זוגיים.

נשים לב שערכי n האפשריים תלויים רק בזוגיות של n: אם n אי-זוגי נקבל שהאדם שיושב שני מקומות לשמאלו של האדם ה-n הוא דובר אמת, אך כיוון שאדם זה הוא אדם מספר 2, אנו יודעים שהוא שקרן ולכן מצב זה לא יכול לקרות. אם n זוגי, נקבל שכל התנאים מתקיימים שכן האדם שיושב שני מקומות לשמאלו של האדם ה-$n-1$ (שהינו דובר אמת כי n זוגי) הוא האדם מספר 1 שאכן דובר אמת, והאדם שיושב שני מקומות לשמאלו של האדם ה-n (שהינו שקרן) הוא אדם מספר 2 ששקרן אף הוא. לכן מצב א' לא אפשרי ומצב ב' אפשרי.

2. סידרה חשבונית היא סדרה מהסוג

$$a_n = a + nd$$

כאשר $n = 1,2, \dots$. בנוסף נניח כי $d \neq 0$.

סידרה הנדסית היא סידרה מהסוג

$$b_n = b \cdot q^n$$

כאשר $n = 1,2, \dots$. בנוסף נניח כי $q \neq 1, 0, -1$ ו-$b \neq 0$.

א. האם נכון שכל סדרה חשבונית (אינסופית) של מספרים שלמים מכילה סדרה הנדסית (אינסופית)? כלומר, ניתן לבחור תת-סדרה של איברי הסדרה החשבונית, כך שהתת-סדרה תהיה הנדסית?

ב. האם זה נכון לסדרות של מספרים ממשיים?

פתרון:

א. כן. תהא $a_n = a + nd$ סידרה חשבונית של מספרים שלמים. קל לראות ש d וa שלמים.
נתבונן בסדרה $b_n = a \cdot (d+1)^n$.
ניתן לראות לאחר פתיחת הסוגריים שהמספר $\frac{a((\mathrm{d}+1)^n-1)}{d}$ שלם, וכיוון ש
$b_n = a_{\frac{\mathrm{a}((\mathrm{d}+1)^n-1)}{d}}$ זו סדרה הנדסית שהינה תת-סדרה של a_n.

ב. לא. יהי d מספר אי-רציונלי (כלומר לא ניתן לכתיבה כמנה של מספרים שלמים), למשל $\sqrt{2}$.
נתבונן בסדרה החשבונית $a_n = 1 + nd$. נניח בשלילה כי היא מכילה סדרה הנדסית, כלומר בפרט קיימים שלושה אינדקסים שונים i, j, k כך ש $\frac{a_j}{a_i} = \frac{a_k}{a_j}$.

לכן לאחר הכפלה מקבלים,

$$(1 + jd)^2 = (1 + id)(1 + kd)$$

ולאחר פתיחת סוגריים,

$$1 + 2jd + j^2d^2 = 1 + (i + k)d + ikd^2$$

כיוון ש $d \neq 0$ ניתן לחלק בו,

$$2j + j^2d = i + k + ikd$$

ולכן

$$. (j^2 - ik)d = i + k - 2j$$

נראה כי לא ייתכן ששני הצדדים שווים ל-0, ולכן אם אכן ישנם אינדקסים כאלו נקבל ש d רציונאלי בסתירה להנחה. אכן, נניח בשלילה כי

$$j^2 - ik = 0 = i + k - 2j$$

כלומר,
$$j = \sqrt{ik} = \frac{i+k}{2}$$

ולכן $\frac{i^2+k^2+2ik}{4} = \left(\frac{i+k}{2}\right)^2 = ik$, ומכאן ש $(i-k)^2 = 0$, כלומר ש- $i = k$, בסתירה להנחה.

(לחילופין, ניתן להשתמש באי-שוויון הממוצעים (AM-GM inequality) אשר קובע כי ממוצע אריתמטי של שני מספרים תמיד גדול או שווה לממוצע הגיאומטרי שלהם, ושוויון מתקיים רק אם שני המספרים שווים). ראינו כי לא ייתכן ששני צדדי השוויון מתאפסים. מכאן ש $d = \frac{i+k-2k}{j^2-ik}$ בסתירה לכך ש d אי-רציונלי.

3. מצא את הערך המקסימלי והמינימלי של הביטוי $\frac{|a+b|+|a+c|+|b+c|}{|a|+|b|+|c|}$.

פתרון: הערך המקסימלי הוא 2, והמינימלי הוא $\frac{2}{3}$.

ראשית נשים לב כי ניתן לקבל את הערכים האמורים. אכן:

אם נבחר $(a, b, c) = (1,1,1)$ נקבל $\frac{|1+1|+|1+1|+|1+1|}{|1|+|1|+|1|} = 2$,

ואם נבחר $(a,b,c)=(1,-1,1)$ נקבל $\frac{|1-1|+|1+1|+|-1+1|}{|1|+|-1|+|1|}=\frac{0+2+0}{3}=\frac{2}{3}$.

נראה כעת כי אלו הערך המקסימלי והמינימלי בהתאמה.

מאי-שוויון המשולש מתקיים

$$|a+b|+|a+c|+|c+b|\le(|a|+|b|)+(|a|+|c|)+(|b|+|c|)=2(|a|+|b|+|c|)$$

ולכן

$$\frac{|a+b|+|a+c|+|b+c|}{|a|+|b|+|c|}\le\frac{2(|a|+|b|+|c|)}{|a|+|b|+|c|}=2.$$

נראה כעת את אי-השוויון השני. מכיוון והביטוי סימטרי ב- a,b,c ניתן להניח כי $|a|\ge|b|\ge|c|$. כיוון שהוא לא משתנה אם מכפילים את a,b,c ב- -1, ניתן להניח כי $a\ge 0$.

לכל שני מספרים $x\ge y$ מתקיים כי $|x+y|=|x|+|y|$ אם x,y בעלי אותו סימן, ואחרת $|x+y|=|x|-|y|$. היות ולפחות אחד מבין הזוגות $(a,b),(a,c),(b,c)$ שווי סימן ו$|c|\ge|a|,|b|$, קיים זוג עבורו מתקיים כי $|x+y|=|x|+|y|\ge|x|-|y|+2|c|$ כאשר x ו-y הם אחד מבין a,b,c. כלומר, אנו מקבלים את אי-השוויון הבא:

$$|a+b|+|a+c|+|b+c|\ge|a|-|b|+|a|-|c|+|b|-|c|+2|c|=2|a|$$

כמו כן מההנחה $|a|\ge|b|\ge|c|$ ולכן $|a|+|b|+|c|\le 3|a|$.

מצירוף שני אי השוויונים הללו נקבל כרצוי,

$$\frac{|a+b|+|a+c|+|b+c|}{|a|+|b|+|c|}\ge\frac{2|a|}{|a|+|b|+|c|}\ge\frac{2|a|}{3|a|}=\frac{2}{3}.$$

4. למספר התלת-ספרתי 999 ישנה תכונה מיוחדת – הוא מתחלק ב-27, וגם סכום ספרותיו מתחלק ב-27. גם למספר הארבע-ספרתי 5778 יש את התכונה המיוחדת הזו – הוא מתחלק ב-27, וגם סכום ספרותיו מתחלק ב-27. לכמה מספרים ארבע ספרתיים יש את התכונה הזו?

תשובה. ישנם 75 מספרים 4-ספרתיים בעלי התכונה המיוחדת.

פתרון. נבדוק מתי המספר $n=\overline{abcd}=1000a+100b+10c+d$ מקיים את התכונה הדרושה. סכום הספרות כמובן חיובי (כיוון ש-a חיובי), ואינו עולה על 36, שכן כל הספרות הן בין 0 ל-9. המספר היחיד המתחלק ב-27 בטווח זה הוא 27 עצמו, כלומר סכום הספרות צריך להיות שווה 27 בדיוק: $a+b+c+d=27$. נשים לב שהמספרים 108 ו-999 מתחלקים ב-27 ($999=27\cdot 37$), ולכן גם המספר $999a+108b+27$ מתחלק ב-27. לכן n מתחלק ב-27 אם ורק אם 27 מחלק את

$$n-999a-108b-27=a-8b+10c+d-(a+b+c+d)=-9b+9c=9(c-b)$$

כלומר, אם ורק אם $c-b$ מתחלק ב-3.

נסמן $a'=9-a,b'=9-b,c'=9-c,d'=9-d$ (כלומר, $a'b'c'd'$ הן ספרות המספר $9999-n$). נשים לב שהתנאים על ספרות אלו הם $a'+b'+c'+d'=9$ (נובע מהתנאי שסכום הספרות המקורי הינו 27) וכן ש $b'-c'$ מתחלק ב-3. נסמן $k=b'+c'$. אזי צריך להתקיים אי השוויון $0\le k\le 9$. בהנתן k בטווח הנ"ל, ישנן $10-k$ דרכים לבחור זוגות a',d' כך שיתקיים השוויון $a'+d'=9-k$ (למשל, כי a' יכול לקבל כל ערך מ-0 עד $9-k$ כולל, ואז נקבע d' ביחידות). נסמן ב-$m(k)$ את מספר הזוגות (b',c') כך ש $b'+c'=k$ וכן $b'-c'$ מתחלק ב-3. כל

בחירה של שני זוגות מתאימים (b', c') ו (a', d') תיתן לנו מספר בעל התכונה, וכך נוכל לספור את כל המספרים הללו.

מהכתוב מעלה, מספר האפשרויות לשני זוגות עבור ערך k נתון הוא $(10-k)\cdot m(k)$, ולכן המספר הכולל של צמדי הזוגות הוא

$$.N' = \sum_{k=0}^{9}(10-k)\cdot m(k)$$

נרכז את החישוב בטבלה:

$k = b' + c'$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
זוגות b', c' כך ש $b' - c'$ מתחלק ב3	0,0	אין	1,1	0,3 3,0	2,2	1,4 4,1	0,6 3,3 6,0	2,5 5,2	1,7 4,4 7,1	0,9 3,6 6,3 9,0
$m(k)$	1	0	1	2	1	2	3	2	3	4
$10-k$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
$(10-k)\cdot m(k)$	10	0	8	14	6	10	12	6	6	4

ומכאן שמספר המספרים בעלי התכונה הוא

$$.N' = 10+0+8+14+6+10+12+6+6+4 = 76$$

אבל התשובה הזו אינה מדויקת, כי בספירה שלנו כללנו גם את המספר 0999, שאכן מקיים את התכונה, אך אינו 4-ספרתי, אלא תלת ספרתי, ולכן צריך לחסר אותו מהתשובה הסופית. זה כמובן המספר היחיד שספרנו שאינו 4-ספרתי באמת, שכן לכל מספר אחר עם 3 ספרות או פחות, סכום הספרות יהיה קטן ממש מ-27.

לכן התשובה הסופית היא שישנם $N = N' - 1 = 75$ מספרים 4-ספרתיים בעלי התכונה המיוחדת.

5. הסדרה a_n מוגדרת עבור כל $n \geq 10$ על ידי כלל הנסיגה הבא: $a_{10} = 5778$, ולכל $n \geq 10$ אם $a_n = 0$ אז $a_{n+1} = 0$, ואם $a_n \neq 0$ אז a_{n+1} הוא המספר שייצוגו בבסיס $n+1$ זהה לייצוג של המספר $a_n - 1$ בבסיס n. לדוגמה

$$,a_{11} = 5\cdot 11^3 + 7\cdot 11^2 + 7\cdot 11^1 + 7\cdot 11^0 = 7586$$

$$.a_{12} = 5\cdot 12^3 + 7\cdot 12^2 + 7\cdot 12^1 + 6\cdot 12^0 = 9738$$

א. האם קיים מספר שלם $n \geq 10$, עבורו $a_n = 0$?

ב. האם $a_{1,000,000} = 0$?

ג. האם $a_{100^{100^{100}}} = 0$?

פתרון:

א. כן.
לכל n, נסתכל על הייצוג של a_n בבסיס n. הייצוג של a_{n+1} בבסיס $n+1$ מתקבל מהורדת 1 מספרת ה"אחדות" מהייצוג של a_n בבסיס n, כאשר אם יש צורך, סוחבים מהספרות הבאות (כלומר מוסיפים $n-1$ לספרת ה"אחדות" ומורידים 1 מספרת ה"עשרות"), והסחיבה מתבצעת בבסיס n.

לכן, לאחר מספר סופי של צעדים, ספרת האחדות תגיע ל-0, ואז ספרת ה"עשרות" (בבסיס n) תקטן ב-1. לכן, כל פעם, לאחר מספר סופי של צעדים, ספרת העשרות קטנה ב-1, וכך, תוך מספר סופי של צעדים, ספרת העשרות מתאפסת. דבר דומה יקרה לספרת המאות, ואז לספרת האלפים, וכן הלאה, ולכן תוך מספר סופי של צעדים, הסדרה תגיע ל-0, כלומר עבור n גדול מספיק $a_n = 0$.

ב. לא.

נגדיר את $f_d(n,k)$ להיות מספר הצעדים שלוקח לסדרה המוגדרת ע"פ אותו כלל נסיגה עם תנאי בסיס $a_n = k \cdot n^d$, כלומר שייצוגו של a_n בבסיס n הוא k ולאחריו d אפסים, להתאפס. בנוסף, נשים לב כי $f_d(n,k)$ (כאשר k יכול להיות גדול מ-n אבל הנוסחה לאיבר הבא נשארת זהה), קטן או שווה למספר הצעדים עד להתאפסות הסדרה המקורית (שבה אנחנו רושמים את $k \cdot n^d$ בבסיס n ואז מפעילים את כלל הנסיגה כדי לקבל את האיבר הבא). לכן במקום לנתח את הסדרה המקורית ניתן לנתח את הסדרה שמתחילה במספר $a_n = k \cdot n^d$, ואם נראה שהיא לא מתאפסת באיבר המיליון, נסיק כי בהכרח הסדרה המקורית לא מתאפסת באיבר המיליון. תחילה נשים לב כי $f_0(b,k) = k$ כיוון שמתייחסים למספר k כספרת אחדות בלבד ולכן לפי כלל הנסיגה האיבר הבא הוא $k-1$.

נתבונן ב $f_1(n,k)$. אם $a_n = k \cdot n$, אז a_{n+1} הינו $\overline{k-1, n-1}^{\,n+1}$ (כלומר בעל ספרת אחדות $n-1$ וספרת עשרות $k-1$ בבסיס $n+1$). לאחר $f_0(n+1, n-1) = n-1$ איברים נוספים, כלומר ב-a_{2n}, ספרת האחדות (בבסיס $2n$) תתאפס, $a_{2n} = \overline{k-1,0}^{\,2n}$. מספר הצעדים שנותרו מכאן עד להגעת הסדרה ל-0 הינו, לפי הגדרה, $f_1(2n, k-1)$, ולכן נקבל ש

$$f_1(n,k) = n + f_1(2n, k-1).$$

מכאן, רואים כי

$$f_1(n,k) = n + f_1(2n, k-1) = n + 2n + f_1(2^2 n, k-2) =$$

$$n + 2n + \cdots + 2^{k-1} n + f_1(2^k, 0) = n(1 + 2 + \cdots 2^{k-1}) = n(2^k - 1)$$

בנוסף, נשים לב שאם נקטין את האיבר ההתחלתי של הסדרה, לא נגדיל את מספר הצעדים עד להתאפסות הסדרה, כיוון שהאיבר ה-n-י של הסדרה החדשה יהיה בהכרח קטן מ-a_n. כעת, גם אם נזניח את שמונת הצעדים הראשונים, כלומר נניח $a_{10} = 5770 = 577 \cdot 10$, נקבל שדרושים לפחות $f_1(10, 577) = 10 \cdot (2^{577} - 1) > 2^{570} > 10^{190}$ צעדים כדי להגיע ל-0 (השתמשנו ב-$10^3 < 2^{10} = 1024$). כלומר, קיבלנו כי $a_{10^{190}} \neq 0$, ובפרט $a_{1{,}000{,}000} \neq 0$.

ג. לא.

נתבונן ב-$a_n = \overline{k,0,0}^{\,n}$, לאחר צעד אחד נגיע ל-$a_{n+1} = \overline{k-1, n-1, n-1}^{\,n+1}$, ולאחר $f_0(n, n-1) = n-1$ צעדים נוספים נקבל $a_{2n} = \overline{k-1, n-1, 0}^{\,2n}$.

כעת נידרש ל-$f_1(2n, n-1)$ צעדים כדי להגיע ל-

$$a_{2n + f_1(2n,n-1)} = \overline{k-1,0,0}^{\,2n + f_1(2n,n-1)},$$

ומכאן נידרש לעוד $f_2(2n + f_1(2n, n-1), k-1)$ צעדים כדי לסיים. כלומר, בסך הכל קיבלנו כי

$$f_2(n,k) = n + f_1(2n, n-1) + f_2(2n + f_1(2n, n-1), k-1).$$

כעת, מהסעיף הקודם אנו יודעים ש $f_1(2n, n-1) = 2n(2^{n-1} - 1) > 2^n$ ולכן,

$$f_2(n,k) > 2^n + f_2(2^n, k-1) > f_2(2^n, k-1).$$

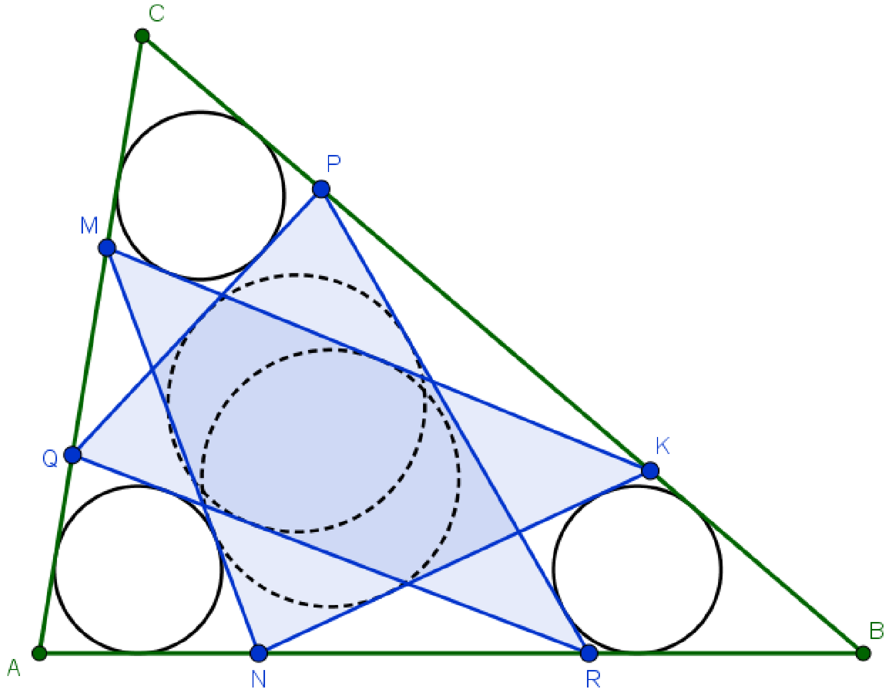
הפעלת אי השוויון k פעמים מניבה חסם תחתון מפורש:

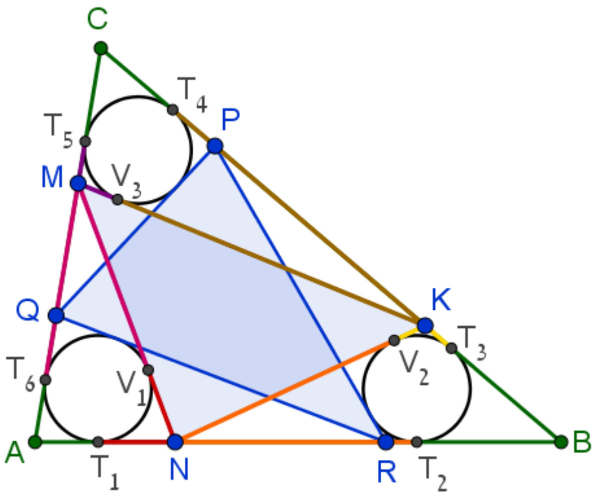
$$f_2(n,k) > f_2(2^n, k-1) > \cdots > f\left(2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}, 1\right) > 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}$$

כאשר במעריך של הביטוי השני מימין 2 מופיע $k-1$ פעמים, ובמעריך של הביטוי הימני ביותר הוא מופיע k פעמים.

כיוון ש $2+76^2=5778$, אנו מקבלים שידרשו יותר מ $f_2(76,76)$ צעדים על מנת שהסדרה תתאפס, ומהחסם למעלה אנו רואים שמספר זה גדול בהרבה מ $100^{100^{100}}$ (למשל כי $100<2^{2^{2^2}}=65,536$ ולכן $100^{100^{100}}$ קטן מ- $2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}$ כאשר 2 מופיע במעריך 11 פעמים.

6. בפינות המשולש ABC נמצאים שלושה מעגלים בעלי רדיוס זהה, שכל אחד מהם משיק לשתי צלעות. קודקודי המשולש MNK נמצאים על צלעות שונות של המשולש ABC, וכל צלע של MNK משיקה לאחד המעגלים. גם קודקודי המשולש PQR נמצאים על צלעות שונות של המשולש ABC, וכל צלע של PQR משיקה לאחד המעגלים (ראו ציור מטה). הוכיחו כי לשני המעגלים החסומים של המשולשים MNK ו-PQR רדיוס זהה.





פתרון. נזכיר שאורכי שני משיקים שיוצאים מאותה הנקודה שווים. נסמן את כל נקודות ההשקה בין ישרים למעגלים כמו בציור. אז $NV_1+NV_2=NT_1+NT_2=T_1T_2$.

באופן זהה נקבל,

1. $KV_2+KV_3=T_3T_4$.
2. $MV_3+MV_1=T_5T_6$.

לכן היקף המשולש MNK הוא,

$$\mathrm{MN}+\mathrm{MK}+\mathrm{NK}=\mathrm{NV}_1+\mathrm{NV}_2+\mathrm{KV}_2+\mathrm{KV}_3+\mathrm{MV}_3+\mathrm{MV}_1 =$$
$$=\mathrm{T_1T_2}+\mathrm{T_3T_4}+\mathrm{T_5T_6}$$

בצורה דומה נקבל שגם ההיקף של PQR הוא $\mathrm{T_1T_2}+\mathrm{T_3T_4}+\mathrm{T_5T_6}$. כלומר לשני המשולשים MNK ו-PQR היקפים שווים.

עובדה נוספת בה נשתמש מספר פעמים היא שבכל משולש מתקיים $\boxed{S=pr}$ כאשר S הוא שטח המשולש, r הוא רדיוס המעגל החסום, ו- p הוא חצי מהיקף המשולש.

נשים לב כי המשולש ABC מורכב מ-4 משולשים: המשולש האמצעי MNK, והמשולשים MAN, NBK ו-MCK. בשלושת המשולשים האחרונים, מנתוני השאלה רדיוס המעגל החסום זהה, ונסמנו ב- ρ. את רדיוס המעגל החסום במשולש MNK, נסמן ב- r_1. נקבל כי

$$S_{\mathrm{ABC}}=S_{\mathrm{MNK}}+S_{\mathrm{MAN}}+S_{\mathrm{NBK}}+S_{\mathrm{MCK}}=r_1\cdot\frac{\mathrm{MN}+\mathrm{MK}+\mathrm{NK}}{2}+$$
$$+\rho\cdot\frac{\mathrm{MA}+\mathrm{MN}+\mathrm{NA}}{2}+\rho\cdot\frac{\mathrm{NB}+\mathrm{BK}+\mathrm{KN}}{2}+\rho\cdot\frac{\mathrm{MC}+\mathrm{CK}+\mathrm{KM}}{2}=$$
$$=\left(r_1+\rho\right)\cdot\frac{\mathrm{MN}+\mathrm{MK}+\mathrm{NK}}{2}+\rho\cdot\frac{\mathrm{MA}+\mathrm{NA}+\mathrm{NB}+\mathrm{BK}+\mathrm{MC}+\mathrm{CK}}{2}=$$
$$=\left(r_1+\rho\right)\cdot\frac{\mathrm{T_1T_2}+\mathrm{T_3T_4}+\mathrm{T_5T_6}}{2}+\rho\cdot\frac{\mathrm{AB}+\mathrm{AC}+\mathrm{BC}}{2}$$

נסמן ב- p את מחצית ההיקף של המשולש ABC, ונקבל את הנוסחה הבאה:

$$r_1=2\cdot\frac{S_{\mathrm{ABC}}-\rho\cdot p}{\mathrm{T_1T_2}+\mathrm{T_3T_4}+\mathrm{T_5T_6}}-\rho .$$

אם נסמן את רדיוס המעגל החסום של המשולש PQR ב- r_2, נוכל לפתח באופן דומה נוסחה זהה עבור r_2. לכן קיבלנו כי $r_1=r_2$.

7. כיסוי אחיד של המספרים הטבעיים מ-1 עד n הוא אוסף סופי של תתי-קבוצות של $\{1,2,3,\dots,n\}$, כך שכל מספר נמצא באותה כמות של תתי-קבוצות. תת-קבוצה מסוימת יכולה להיבחר יותר מפעם אחת. כיסוי חייב להכיל לפחות קבוצה אחת, והוא יכול להכיל את הקבוצה הריקה. לדוגמה, $(\{1\},\{1\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\})$ הוא כיסוי אחיד של 1 עד 4. גם הכיסוי שמכיל רק את הקבוצה הריקה הוא כיסוי אחיד (כל מספר מופיע בדיוק באפס תתי-קבוצות באיחוד זה).
בהינתן שני כיסויים אחידים של 1 עד n נגדיר כיסוי אחיד חדש של 1 עד n על ידי לקיחת הקבוצות משני הכיסויים. לכיסוי החדש הזה נקרא סכום, ונסמן $\oplus$. לדוגמה:

$$(\{1\},\{1\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\})\oplus(\{1\},\{2\},\{3\},\{4\})=$$
$$(\{1\},\{1\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}) .$$

כיסוי אחיד נקרא אי-פריק אם הוא לא סכום של שני כיסויים אחידים.

הוכיחו שלכל n, קיים מספר סופי של כיסויים אחידים אי-פריקים של 1 עד n.

פתרון:
נתחיל מלנסח שלוש טענות עזר ונפתור את השאלה בהנחת הטענות הללו. לאחר מכן נוכיח את הטענות.

טענה 1:
כל כיסוי אחיד ניתן לרישום כסכום של כיסויים אחידים אי-פריקים.

טענה 2:
יהי M מספר טבעי. לכל $\ell \geq 2M$ מספרים שלמים אשר קטנים בערך מוחלט מ- M וסכומם אפס, קיים סכום חלקי (כלומר סכום של תת-קבוצה שלהם שאינה כל הקבוצה) ששווה אפס.

טענה 3:
אם לכיסוי אחיד יש תת-כיסוי אחיד, אז הכיסוי פריק.

נחזור לשאלה.
נפתור את השאלה באינדוקציה. המקרה $n=1$ קל כיוון שהכיסויים היחידים במקרה זה הם הקבוצות שמכילות רק את $\{1\}$ מספר כלשהו של פעמים. ברור כי ישנם רק שני כיסויים אחידים אי-פריקים $(\{1\})$ ו-$(\{\})$ (הקבוצה הריקה).
נניח שהוכחנו שעבור n יש כמות סופית של כיסויים אחידים אי-פריקים, נוכיח את הטענה עבור $n+1$.
נניח ש- $a_1, a_2, \ldots, a_k$ הינם כל הכיסויים האחידים האי-פריקים של $1, \ldots, n$ (יש מספר סופי לפי הנחת האינדוקציה). נסמן ב-$d(a_i)$ את כמות הקבוצות שכל מספר נמצא בהן בכיסוי a_i, וב- $g(a_i)$ את כמות הקבוצות בכיסוי a_i. מכיוון שזו כמות סופית של מספרים, הם חסומים על ידי מספר כלשהו M.
נניח ש- B הוא כיסוי אחיד של $1, \ldots, n+1$. נתבונן בכיסוי B' של $1, \ldots, n$ המתקבל מ-B על ידי הסרת כל מופע של $n+1$ מקבוצה שנמצאת ב-B (אך נזכור מי היו הקבוצות מהן הסרנו את $n+1$). הכיסוי B' הוא כיסוי אחיד של $1, \ldots, n$ כיוון ש-B הינו כיסוי אחיד של $1, \ldots, n+1$, ומטענה 1 ניתן לפרק אותו לסכום של כיסויים אחידים אי-פריקים $B' = \bigoplus_{i=1}^{\ell} b_i'$, כאשר כל b_i' הוא אחד מהכיסויים a_i (לפי ההנחה אלו כל הכיסויים האחידים האי-פריקים של $1, \ldots, n$). נטען שאם $\ell \geq 2M$ אז B הוא כיסוי אחיד פריק.
לכל b_i' נסמן ב- b_i את הכיסוי של $1, \ldots, n+1$ שמתקבל מהקבוצות מהן הגיעה הקבוצות ב-b_i', כלומר b_i הוא הכיסוי שמכיל את הקבוצות ב-b_i' ללא הסרת המופעים של $n+1$. בנוסף נסמן ב- r_i את מספר הקבוצות ששייכות ל- b_i כך ש-$n+1$ נמצא בהן. נשים לב ש- r_i חסום בכמות הקבוצות ב b_i ושכמות הקבוצות ב- b_i היא לכל היותר M.
מכיוון ש-B כיסוי אחיד, כמות הקבוצות ש-$n+1$ נמצא בהן שווה לכמות הקבצות בהן 1 (וכל מספר אחר) נמצא בהן. לכן,

$$\sum_{i=1}^{\ell} d(b_i) = \sum_{i=1}^{\ell} r_i$$

ומהעברת אגפים נקבל,

$$\sum_{i=1}^{\ell} d(b_i) - r_i = 0 \ .$$

נשים לב שכל המספרים בסכום הינם שלמים וחסומים בערך מוחלט על ידי M.

כיוון ש- $\ell \geq 2M$, מטענה 2 אפשר למצוא תת סכום של הסכום הנ"ל ששווה אפס, כלומר ניתן למצוא קבוצת אינדקסים S שאינה כל המספרים מ-1 עד ℓ כך שמתקיים,

$$\sum_{i \in S} d(b_i) - r_i = 0$$

כלומר,

$$\sum_{i \in S} d(b_i) = \sum_{i \in S} r_i \ .$$

נתבונן בכיסוי

$$\bigoplus_{i \in S} b_i \ .$$

כל מספר שונה מ-$n+1$ מכוסה $\sum_{i \in S} d(b_i)$ פעמים, ו-$n+1$ מכוסה $\sum_{i \in S} r_i$ פעמים. כיוון ש $\sum_{i \in S} d(b_i) = \sum_{i \in S} r_i$, זהו כיסוי אחיד, ולכן מטענה 3 הכיסוי B הוא כיסוי אחיד פריק.

כלומר, כל כיסוי אחיד של $1, \dots, n+1$ כך שלאחר הסרת המופעים של $n+1$ מקבוצותיו מתפרק ללפחות 2M כיסויים אי-פריקים הינו פריק, ולכן אם התחלנו מכיסוי אחיד אי-פריק, נקבל כי ℓ חסום ב-2M. כיוון שכל כיסוי אי-פריק של $1, \dots, n$ יכול להכיל לכל היותר M קבוצות וכל מספר מכוסה לכל היותר M פעמים (כך הגדרנו את M), ול-$1, \dots, n$ יש מספר סופי של תתי-קבוצות, כמות הכיסויים האחידים האי-פריקים חייבת להיות סופית.

כעת נוכיח את טענות העזר.

טענה 1:

כל כיסוי אחיד ניתן לרישום כסכום של כיסויים אחידים אי-פריקים.

הוכחת טענה 1:

נניח ש- a הוא כיסוי אחיד. אם a אי-פריק אז סיימנו, אחרת אפשר לרשום אותו כסכום

$$b_1 \oplus b_2$$

כאשר ב- b_1 ו- b_2 יש פחות קבוצות מאשר ב- a. כעת, באינדוקציה על כמות הקבוצות אפשר לרשום את שני הכיסויים האחידים הללו כסכום של כיסויים אחידים אי-פריקים c_i ו- c'_i (בסיס האינדוקציה ברור כי כיסוי אחיד שמכיל קבוצה אחת חייב להיות אי-פריק):

$$b_1 = c_1 \oplus c_2 \oplus \dots \oplus c_k$$

$$.b_2 = c'_1 \oplus c'_2 \oplus \dots \oplus c'_{k'}$$

לכן ניתן לרשום את a כסכום של כיסויים אחידים אי-פריקים

$$a = c_1 \oplus c_2 \oplus \dots \oplus c_k \oplus c'_1 \oplus c'_2 \oplus \dots \oplus c'_k \ .$$

טענה 2:

יהי M מספר טבעי. לכל $\ell \geq 2M$ מספרים שלמים אשר קטנים בערך מוחלט מ- M וסכומם אפס, קיים סכום חלקי (כלומר סכום של תת-קבוצה שלהם שאינה כל הקבוצה) ששווה אפס.

הוכחת טענה 2:

נסמן את המספרים ב- $n_1, n_2, \ldots, n_\ell$, ונסדרם מחדש בצורה הבאה. תחילה נבחר את אחד המספרים באקראי, נקרא לו n'_1, ואם הוא אפס אז סיימנו שכן הוא סכום חלקי של איברי הקבוצה. אחרת, אם הוא שלילי נבחר את המספר הבא כך שיהיה חיובי (בהכרח קיים כזה כיוון ש- n'_1 שלילי והסכום של כולם 0, אז בלתי אפשרי שכל השאר שליליים), ואם הוא חיובי נבחר את המספר הבא כך שיהיה שלילי, נקרא למספר שבחרנו n'_2.

נתבונן ב- $n'_1 + n'_2$, אם הוא אפס סיימנו, אחרת נבחר את המספר הבא כמו קודם (כלומר נבחר את המספר הבא כך שהסימן שלו הפוך מהסימן של הסכום – אם הסכום שלילי נבחר מספר חיובי ואחרת נבחר מספר שלילי). נמשיך כך ונקבל סידור חדש של המספרים, $n'_1, n'_2, \ldots, n'_\ell$. כעת, נשים לב שלכל k מתקיים:

$$\left|\sum_{i=1}^{k} n'_i\right| < M$$

עבור $k=1$ זה נובע מהנחות השאלה, עבור ערכי k אחרים נשים לב שמהצורה בה הגדרנו את הסדר למספרים $\sum_{i=1}^{k} n'_i$ ו- n'_{k+1} סימן הפוך (אחד שלילי ואחד חיובי). לכן ניתן להוכיח את אי-השוויון הבא בעזרת אינדוקציה:

$$\left|\sum_{i=1}^{k+1} n'_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{k} n'_i + n'_{k+1}\right| \leq \max(\left|\sum_{i=1}^{k} n'_i\right|, \left|n'_{k+1}\right|) < M$$

לכן כל סכום חלקי יכול לקבל $2M-2$ ערכים אפשריים (כל המספרים בין $-M+1$ ל- $M-1$ ללא אפס). אך מכיוון שכמות הסכומים החלקיים היא $2M-1$ (לא כולל האחרון), ישנם בהכרח שני סכומים שווים, כלומר:

$$\sum_{i=1}^{k} n'_i = \sum_{i=1}^{f} n'_i .$$

בפרט, אחד מהאינדקסים גדול מהשני, נניח $f > k$, ולכן אנו מקבלים כדרוש

$$\sum_{i=k+1}^{f} n'_i = 0 .$$

טענה 3:

אם לכיסוי אחיד יש תת-כיסוי אחיד, אז הכיסוי פריק.

הוכחת טענה 3:

נניח ש- a כיסוי אחיד, ו- b תת כיסוי אחיד של a. נגדיר את c להיות הכיסוי שמורכב מכל הקבוצות שמופיעות ב- a אך לא ב- b. זהו כיסוי אחיד כי אם כל מספר נמצא ב- $d(a)$ קבוצות מ- a ו- $d(b)$ קבוצות מ- b, אז הוא יהיה ב- $d(a)-d(b)$ קבוצות מ- c. לכן c כיסוי אחיד, ומכאן ש $a = b \oplus c$ הוא פירוק של a לכיסויים אחידים.