



האולימפיאדה הארצית ע"ש פרופ' גיליס ה'תשפ"ה

1. יהי n שלם חיובי. במעגל רשומות n אותיות, כל אחת מהן היא A , B או C . כאשר קוראים את האותיות במעגל עם כיוון השעון, הרצף AB מופיע 100 פעמים, הרצף BA מופיע 99 פעמים, והרצף BC מופיע 17 פעמים. כמה פעמים הרצף CB מופיע?

תשובה. 16.

פתרון: נסמן ב- x את מספר הפעמים שהרצף CB מופיע. נניח שבמעגל יש בדיוק N רצפים של האות B . כל רצף כזה מסתיים ב- BA או ב- BC , ולכן

$$N = 99 + 17 = 116$$

מצד שני, כל רצף של B מתחיל מ- AB או CB , ולכן $N = 100 + x$.

$$116 = 100 + x \text{ ולכן } x = 16.$$

2. נתון מעוין $ABCD$. נבחרו שמונה נקודות נוספות $X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2, W_1, W_2$ כך שהמרובעים $AX_1BX_2, BY_1CY_2, CZ_1DZ_2, DW_1AW_2$ הם ריבועים. הראו כי שמונה הנקודות החדשות נמצאות על שני ישרים.

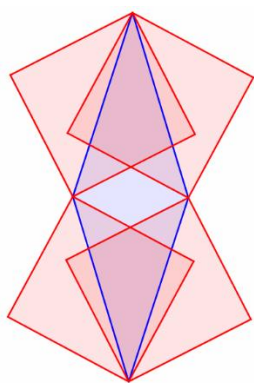
פתרון: נתחיל מלמה קלה.

למה: יהי משולש ABC החסום במעגל Ω . האנך האמצעי של BC נחתך עם Ω בנקודות N, S . מתקיים ש- AN, AS חוצים את הזוויות בין הישרים BA, CA .

הוכחה: נניח ש- N נמצאות על $\widehat{BAC}$. מתקיים ש- $SB = SC$ ולכן $\angle BAS = \angle SAC$ ולפיכך SA חוצה את $\angle BAC$. ברור ש- S, N נקודות נגדיות על Ω ולכן $\angle SAN = 90^\circ$ ומכאן נובע שאם SA הוא חוצה הזווית של $\angle BAC$ אזי NA הוא חוצה הזווית החיצוני $\square$

נסמן ב- O את נקודת חיתוך האלכסונים במעוין. נשים לב שהמחומש AX_1BOX_2 חסום במעגל שקוטרו AB . בנוסף נשים לב ש- X_1, X_2 הם החיתוכים של האנך האמצעי של AB עם המעגל הנ"ל. מהלמה נובע ש- X_1, X_2 נמצאות על חוצי הזוויות של $\angle AOB$.

באופן דומה נוכיח גם ש- $Y_1, Y_2, Z_1, Z_2, W_1, W_2$ נמצאות על הישרים שחוצים את הזוויות בין אלסוני המעוין, מש"ל.





3. בארט רשם 2024 פעמים את הספרה "1" בשורה. לאחר מכן ליסה רושמת עוד 2024 ספרות מימין לספרות שבארט רשם, כך שהמספר שמתקבל הוא ריבוע של מספר שלם. מצאו את כל האפשרויות לספרות שליסה הייתה יכולה לרשום.

פתרון: המספר שמקבל הוא בין $0 \dots 100 \dots 11$ לבין $9 \dots 199 \dots 11$ כאשר בכל מספר "1" מופיע 2024 פעמים ו-"0" או "9" מופיע 2024 פעמים. נשים לב שהגבול התחתון הוא:

$$10^{2024} \cdot \frac{10^{2024} - 1}{9}$$

ואילו הגבול העליון הוא:

$$10^{2024} \cdot \frac{10^{2024} - 1}{9} + 10^{2024} - 1 = \frac{(10^{2024} - 1)(10^{2024} + 9)}{9}$$

לפיכך השורש של המספר שמתקבל נמצא בקטע

$$\left[\frac{10^{1012}}{3} \cdot \sqrt{10^{2024} - 1}, \frac{\sqrt{(10^{2024} - 1)(10^{2024} + 9)}}{3} \right]$$

נטען שיש רק מספר שלם אחד שנמצא בקטע, זה יוכיח שיש רק אופציה אחת לספרות שליסה הייתה יכולה לרשום.

ברור שהקצה שמאלי של הקטע ממש קרוב ל- $\frac{10^{2024}-1}{3}$, נטען שהוא טיפה יותר גדול:

$$\frac{10^{1012}}{3} \cdot \sqrt{10^{2024} - 1} \stackrel{?}{>} \frac{10^{2024} - 1}{3}$$

נכפיל ב-3 ונעלה בריבוע ונקבל שצריך לבדוק את אי השוויון:

$$10^{4048} - 10^{1024} \stackrel{?}{>} 10^{4048} - 2 \cdot 10^{2024} + 1$$

וזה בברור נכון.

בשביל להראות שבקטע יש לכל היותר שלם אחד מספיק להוכיח ש-

$$\frac{\sqrt{(10^{2024} - 1)(10^{2024} + 9)}}{3} \stackrel{?}{<} \frac{10^{2024} - 1}{3} + 2$$

נכפיל ב-3 ונעלה בריבוע ונקבל שצריך לבדוק ש-

$$10^{4048} + 8 \cdot 10^{2024} - 9 \stackrel{?}{<} 10^{4048} + 10 \cdot 10^{2024} + 25$$

שזה ברור.

נסיק כי המספר הריבועי היחיד שיכול להתקבל בתהליך הוא

$$\left(\frac{10^{2024} - 1}{3} + 1 \right)^2 = 3333 \dots 34^2$$



נוכיח שהמספר הזה אכן מהצורה המבוקשת:

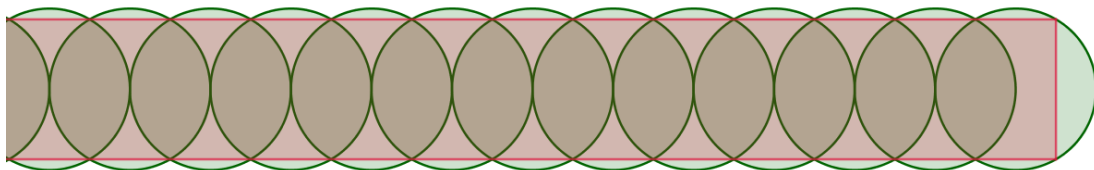
$$\begin{aligned} \left(\frac{10^{2024} + 2}{3}\right)^2 &= \frac{10^{4048} + 4 \cdot 10^{2024} + 4}{9} = \\ &= \frac{10^{4048} - 1}{9} + \frac{4 \cdot (10^{2024} - 1)}{9} + 1 = 11 \dots 1 + 44 \dots 4 + 1 \end{aligned}$$

כאשר במחובר הראשון יש 4048 ספרות ובמחובר השני יש 2024 ספרות. לפיכך נקבל ש-2024 הספרות הראשונות הן "1", 2023 הספרות הבאות הן "5" וספרות היחידות היא "6".

4. נתון שולחן מלבני בגודל $100 \times \sqrt{3}$. מה היא הכמות המינימלית של מפיות עגולות עם רדיוס 1 שדרושה בשביל לכסות את השולחן? הערה: מותר למפיות לעלות זו על זו ולצאת מחוץ לגבולות השולחן.

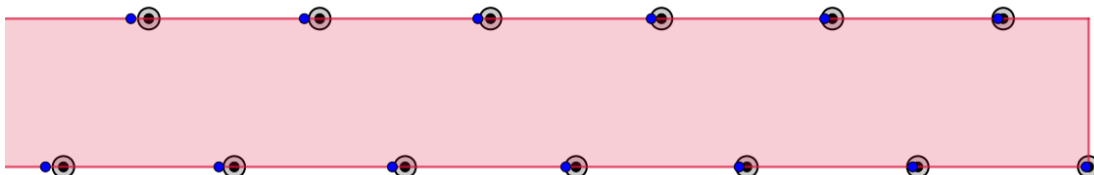
תשובה. 100.

פתרון: ניתן לחלק את השולחן למאה מלבנים בגודל $1 \times \sqrt{3}$, ובכל מלבן כזה אורך האלכסון שווה ל-2, לכן ניתן לכסות אותו באמצעות מפית עם רדיוס 1. זה מסביר שניתן לכסות את השולחן עם 100 מפיות.



צריך גם להוכיח כי לא ניתן לכסות את הלוח עם פחות מפיות. אנו נציג לזה שתי הוכחות.

הוכחה ראשונה. נסמן בצבע שחור סדרה של נקודות על השולחן: על אחד הצדדים הארוכים נסמן פינה, ואת כל הנקודות במרחק זוגי ממנה; בצד המקביל נסמן נקודות שהמרחק מהן לקצה הצלע אי-זוגי. סה"כ יש 101 נקודות שחורות. מרחק בין כל שתי נקודות שחורות הוא לפחות 2, ובהרבה מקרים זה בדיוק 2.



כעת נסמן נקודות כחולות שמוזזות שמאלה ביחס לנקודות שחורות (כמו בציור, מניחים שהצלעות הארוכות נגדיות); את הנקודה הימנית נזיז ב-0.0001 שמאלה, את הנקודה השנייה מימין (בצד הנגדי) ב-0.0002, את הנקודה השלישית ב-0.0003 וכך הלאה. בזה אנו נגדיל את כל המרחקים בין הנקודות; אומנם נצטרך להסתפק ב-100 נקודות כחולות כי הנקודה ה-101 כבר תחרוג מהשולחן. נשים לב כי המרחק בין כל שתי נקודות כחולות גדול



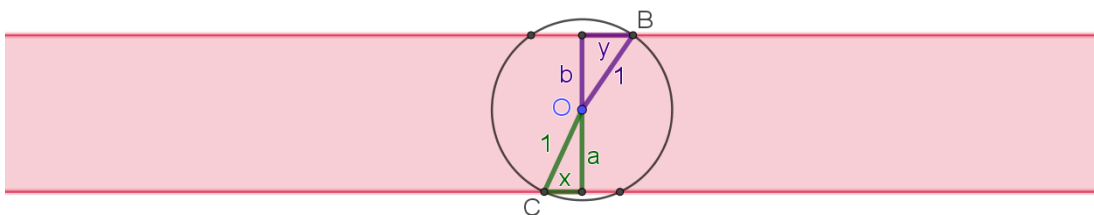
מ-2, לפיכך אנו חייבים לכסות כל נקודה כחולה במפית נפרדת ולכן חייבים לפחות 100 מפיות על מנת לכסות את השולחן.

הוכחה שנייה. נבחר מפית כלשהי, ונסתכל איזה אורך היא מכסה מ-2 הצלעות הארוכות. אם המפית נוגעת רק בצד אחד ולא בשני, אז היא יכולה לכסות לכל היותר אורך 2, כי זה הקוטר שלה וקוטר זה המיתר הארוך ביותר. אם היא נמצאת בדיוק באמצע כמו כל המפיות בדוגמה שהצגנו, אז גם במקרה המפית מכסה אורך 2. אם נראה שהאורך הכולל שכל מפית מכסה בשני הישרים של הצדדים הארוכים של השולחן הוא 2 לכל היותר, זה ייתן לנו הוכחה מלאה, כי האורך הכולל של שתי הצלעות שווה ל-200.

נניח שהמרחקים ממרכז המפית לצלעות הארוכות של השולחן הם a, b ואורכי הקטעים שהמפית מכסה על ישרי הצלעות הם $2x, 2y$ בהתאמה. ברור ש- $a + b = \sqrt{3}$, ושאיפתנו היא להוכיח כי $x + y \leq 1$ (כי זה בדיוק כמו להגיד ש- $2x + 2y \leq 2$). לפי פיתגורס

$$x^2 + a^2 = 1$$

$$y^2 + b^2 = 1$$



מכאן אפשר לקבל את הטענה באמצעות אלגברה; אבל אנחנו נציג הוכחה גאומטרית. נניח שוב שהצלעות הארוכות אופקיות; מעגל שרדיוסו 1 פוגש את הצלע העליונה בשתי נקודות שהימנית מהן B, ואת הצלע התחתונה בשתי נקודות שהשמאלית מהן C. אורך הקטע BC הוא לכל היותר 2, כי הן באותה המפית. המרחק האנכי בין שתי הנקודות הוא $\sqrt{3}$ והמרחק האופקי הוא $x + y$. מכאן לפי משפט פיתגורס $(x + y)^2 + 3 \leq 2^2$, לכן $(x + y)^2 \leq 1$, כלומר $x + y \leq 1$. מש"ל.

5. בנהר מתגוררות להן 2024 לוטרות. חלקן חברות זו של זו. האם יתכן שלכל 1012 לוטרות קיימת לוטרה נוספת, אחת בדיוק, שהיא חברה של כל 1012 הלוטרות?

פתרון: נחלק את הפתרון למספר טענות.

טענה 1: לכל לוטרה יש לפחות 1012 חברות.

הוכחה: נניח בשלילה שלאיילה יש לכל היותר 1011 חברות. נבחר את איילה ביחד עם החברות ונוסיף עוד מספר לוטרות באקראי כך שתתקבל קבוצה בגודל 1012. כל



החברות של איילה כבר נמצאות בקבוצה ולפיכך לא קיימת לוטרה מחוץ לקבוצה שחברה לכל הלוטרות בקבוצה, בסתירה לנתון $\square$

טענה 2: לכל לוטרה יש לכל היותר 1012 חברות.

הוכחה: נניח שלאיילה יש לפחות $n \geq 1013$ חברות. נניח שברווז הוא חבר של איילה. נשים לב שלאיילה וברווז יש לכל היותר 1011 חברים משותפים, אכן אם היו להם 1012 חברים משותפים אזי לקבוצה של 1012 החברים המשותפים היו שתי לוטרות שחברות של כולן, בסתירה לנתון.

נתבונן בקבוצות מהסוג הבא: איילה ו-1011 חברות שלה. אנו יודעים שלכל קבוצה כזו קיימת לוטרה יחידה שחברה של כולן, כמובן שהלוטרה הזו היא אחת מהחברות של איילה. לפיכך לכל אחת מבין $\binom{n}{2011}$ הקבוצות של 2011 חברות של איילה ניתן להתאים חברה של איילה. מצד שני, כל חברה של איילה יכולה להיות מותאמת לקבוצה אחת לכל היותר, הרי יש לה לכל היותר 1011 חברות משותפות עם איילה. המסקנה היא ש-

$$\binom{n}{2011} \leq 2011$$

ולפיכך $n \leq 2011$ $\square$

טענה 3: לכל לוטרה מתקיים שכל שתי חברות שלה חייבות להיות חברות זו של זו.

הוכחה: נניח שברווז וגמל הם חברים של איילה. נתבונן באיילה וכל החברות שלה מלבד ברווז, זו קבוצה מגודל 2012 ולכן קיימת לוטרה שחברה של כולן, הלוטרה הזו חייבת להיות גמל כיוון שזה החבר היחיד של איילה שלא נמצא בקבוצה. לפיכך גמל חייב להיות חבר של ברווז $\square$

כעת ניתן לסיים את ההוכחה בקלות. נחלק את כל הלוטרות לשתי קבוצות: הקבוצה הראשונה היא 2012 החברות של איילה, הקבוצה השנייה היא כל שאר 2012 הלוטרות. לקבוצה השנייה חייבת להיות לוטרה שחברה של כולן, נקרא לה ברווז. נקבל שברווז חבר של כל הלוטרות בקבוצה השנייה אבל לפי טענה 3 הוא גם חבר של כל הלוטרות בקבוצה הראשונה, בסתירה לכך שלברווז חייבים להיות בדיוק 2012 חברים.

6. נתונים a, b, c ממשיים חיוביים עבורם מתקיים ש- $ab + bc + ca + abc = 4$. הראו כי:

$$\sqrt{\frac{ab + ac + 1}{a + 2}} + \sqrt{\frac{bc + ab + 1}{b + 2}} + \sqrt{\frac{ca + cb + 1}{c + 2}} \leq 3$$

פתרון: נתחיל מלמה:

למה: לכל x, y, z חיוביים מתקיים ש-

$$(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$$



הוכחה: נפתח סוגריים באגף שמאל ונכזז גורמים משותפים עם אגף ימין, נקבל שצריך להוכיח ש-

$$2xy + 2xz + 2yz \leq 2(x^2 + y^2 + z^2)$$

נעביר אגפים ונקבל שמספיק להוכיח ש-

$$0 \leq (x - y)^2 + (y - z)^2 + (x - z)^2$$

שזה כמובן ברור $\square$

הערה: הלמה ברורה באופן מיידי מאי-שוויון קושי-שוורץ.

נשתמש בלמה עבור $x = \sqrt{\frac{ab+ac+1}{a+2}}$ וביטויים סימטריים. נקבל ש-

$$\left(\sum_{cyc} \sqrt{\frac{ab+ac+1}{a+2}} \right)^2 \leq 3 \sum_{cyc} \frac{ab+ac+1}{a+2}$$

מספיק להוכיח ש-

$$\sum_{cyc} \frac{ab+ac+1}{a+2} \leq 3$$

וזה יסיים את השאלה.

טענה: אם $ab + bc + ca + abc = 4$ אז מתקיים ש-

$$\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} = 1$$

הוכחה ראשונה לטענה: נכפיל במחנה המשותף:

$$\sum_{cyc} (a+2)(b+2) \stackrel{?}{=} (a+2)(b+2)(c+2)$$

נפתח סוגריים:

$$\sum_{cyc} (ab + 2a + 2b + 4) \stackrel{?}{=} abc + 8 + \sum_{cyc} (2ab + 4a)$$

נצמצם איברים דומים ונקבל:

$$4 \stackrel{?}{=} abc + \sum_{cyc} ab$$

וזה הנתון.

הוכחה אלטרנטיבית לטענה: נתבונן בפולינום ממעלה 3 שהשורשים שלו הם a, b, c :

$$P(x) = (x - a)(x - b)(x - c) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$



כאשר $\alpha = -a - b - c$, $\beta = ab + ac + bc$ ו- $\gamma = -abc$. מהנתון נובע ש- $\gamma = \beta - 4$. נציב $y = x + 2$ ונקבל את הפולינום:

$$Q(y) = y^3 + (\alpha - 6)y^2 + (12 - 4\alpha + \beta)y - (12 - 4\alpha + \beta) = 0$$

השורשים של הפולינום האחרון הם $a + 2, b + 2, c + 2$. נתבונן בפולינום

$$R(y) = y^3 \cdot Q\left(\frac{1}{y}\right) = 1 + (\alpha - 6)y + (12 - 4\alpha + \beta)y^2 - (12 - 4\alpha + \beta)y^3$$

השורשים שלו הם $\frac{1}{a+2}, \frac{1}{b+2}, \frac{1}{c+2}$. נחלק את R במקדם המוביל שלו ונקבל פולינום מתוקן שהמקדם של y^2 שלו שווה ל-1 ולפיכך סכום השורשים של R שווה ל-1, כרצוי. $\square$

בתור מסקנה מהטענה נקבל גם את הזהות הבאה:

$$\sum_{cyc} \frac{a}{a+2} = \sum_{cyc} \frac{1}{a+2} = 1$$

בשביל להוכיח אותה, נחסר בין שני הביטויים השמאליים ונקבל ש-

$$\sum_{cyc} \frac{a-1}{a+2} = \sum_{cyc} 1 - \frac{3}{a+2} = 3 - 3 \sum_{cyc} \frac{1}{a+2} = 0$$

כעת נסיים את השאלה. כפי שאמנו, מספיק להוכיח ש-

$$\sum_{cyc} \frac{ab + ac + 1}{a+2} \leq 3$$

אנו טוענים שאי-שוויון האחרון הוא למעשה זהות! נוכיח זאת,

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} \frac{ab + ac + 1}{a+2} &= 1 + \sum_{cyc} \frac{ab + ac}{a+2} = 1 + \sum_{cyc} \frac{a(a+b+c) - a^2}{a+2} = \\ &= 1 + (a+b+c) \cdot \sum_{cyc} \frac{a}{a+2} - \sum_{cyc} \frac{a^2}{a+2} = 1 + a + b + c - \\ &- \sum_{cyc} \frac{a(a+2) - 2a}{a+2} = 1 + a + b + c - \sum_{cyc} \frac{a(a+2)}{a+2} + \sum_{cyc} \frac{2a}{a+2} = \\ &= 1 + 2 \sum_{cyc} \frac{a}{a+2} = 3 \end{aligned}$$



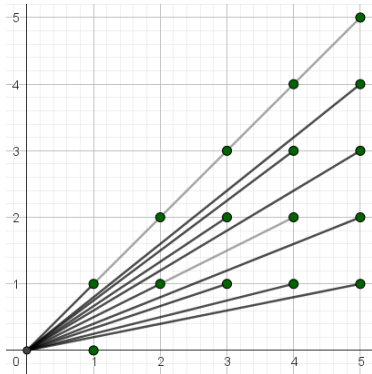
7. לכל n שלם חיובי נדיר את הקבוצה A_n של רביעיות סדורות (a, b, c, d) של מספרים שלמים, שמקיימות את התנאים הבאים: $0 \leq a \leq c \leq n, 0 \leq b \leq d \leq n$ וגם $c + d > n, bc = ad + 1$.

נגדיר

$$\alpha_n = \sum_{(a,b,c,d) \in A_n} \frac{1}{ab + cd}$$

כאשר הסכום נלקח על כל הרביעיות (a, b, c, d) ב- A_n . מצאו את כל המספרים הממשיים t עבורם $\alpha_n > t$ לכל n שלם חיובי.

תשובה. $t \leq \frac{\pi}{4}$.



פתרון. נסמן במישור את כל הנקודות (x, y) עבורן

המספרים x ו- y הם שלמים חיוביים המקיימים

$1 \leq y \leq x \leq n$, בנוסף נסמן את הנקודה $(1,0)$. נחבר

בקטעים את ראשית הצירים לכל אחת מבין הנקודות הללו.

הקווים האלה מחלקים את הזווית בין הציר האופקי לאלכסון להרבה זוויות קטנות. סכום של הזוויות הקטנות האלו הוא 45° , או $\frac{\pi}{4}$ ברדיאנים.

על מנת לקבל את כל הקווים מספיק לקחת נקודות (x, y) בהם x ו- y זרים, הרי (kx, ky) ו- (x, y) מגדירים את אותו הקו.

נתאר תהליך שידוע בשם טורי פארי (Farey series). מתחילים בשני ווקטורים

$$(1,0) \quad (1,1)$$

ובהמשך רושמים במרווח בין שני ווקטורים סמוכים את ווקטור הסכום שלהם. נגיד בשלב השני נקבל את הרשימה:

$$(1,0) \quad (2,1) \quad (1,1)$$

בהמשך ניתן לקבל את הרשימה:

$$(1,0) \quad (3,1) \quad (2,1) \quad (3,2) \quad (1,1)$$

וכך הלאה. אפשרי כל פעם להוסיף וקטור אחד, או כמה ווקטורים בו-זמנית.

ניתן לייחס לכל ווקטור (x, y) שבר $\frac{y}{x}$ ואז מקבלים סדרה עולה של שברים, כיגון

$$0 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad 1$$

אכן, כל ווקטור נמצא בין שני ווקטורים שהוא רשום בינם, כי הוא אלכסון של המקבילית שהם הצדדים שלה, מכאן השיפוע בשורת הווקטורים בכל שלב עולה משמאל לימין.

טענה 1. לכל שני ווקטורים רצופים (x_1, y_1) (x_2, y_2) שמופיעים בשורה בסדר זה

באיזשהו שלב, מתקיים $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 1$.



הערה. המשמעות הגיאומטרית של זה היא שכל שני ווקטורים רצופים יוצרים מקבילית ששטחה שווה ל-1. וגם קל להוכיח את הטענה באופן גיאומטרי.

כמסקנה מהטענה נקבל ש- $\frac{x_1}{y_1} - \frac{x_2}{y_2} = \frac{1}{y_1 y_2}$ (מספיק לעשות מחנה משותף).

מסקנה נוספת מהטענה היא שבכל שלבי התהליך מקבלים רק ווקטורים בהם x זר ל- y , והשבר $\frac{y}{x}$ הוא מצומצם. אכן, אם למשל x_1, y_1 היו מתחלקים במספר שלם $k > 1$, אז גם $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 1$ היה מתחלק ב- k .

טענה 2. בתהליך שתואר ניתן לקבל כל ווקטור (x, y) עבור $x > y > 1$ בתנאי ש- x, y מספרים שלמים וזרים.

נציין שווקטורים $(x, 0)$ לא יופיעו בתהליך חוץ מהווקטור $(1, 0)$ שנמצא בהתחלה, גם לפי איך שהתהליך בנוי, וגם בהתאם לטענה 1, כי אז ווקטור כזה ישתתף בביטוי מהסוג $x_1 y_2 - x_2 y_1$ יחד עם עוד ווקטור, והביטוי יהיה חייב להתחלק ב- x ולא יוכל להיות 1.

טענה 3. כל שני ווקטורים עם קואורדינאטות חיוביות (x_1, y_1) , (x_2, y_2) המקיימים את הזהות $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 1$, יופיעו בשורה ברצף בשלב מסוים. כל הווקטורים (x, y) שיופיע בינם בהמשך התהליך מקיימים ש- $x \geq x_1 + x_2$.

נוכיח את הטענות בסוף.

נתרגם את ניסוח השאלה לשפה ווקטורית. נגיד שיש ווקטורים $\vec{u} = (c, a)$ ו- $\vec{v} = (d, b)$ שמקיימים את התנאים $0 \leq a \leq c \leq n$, $0 \leq b \leq d \leq n$, $bc - ad = 1$, $c + d > n$.

נריץ את התהליך של פארי שהסברנו, כל עוד מצליחים להוסיף ווקטורים (x, y) עבורם $x \leq n$. אז לפי טענה 2, בשורה יהיו רשומים כל הווקטורים שיכולים לשמש בתור $\vec{u}$ או $\vec{v}$. נשים לב כי עבור כל שני ווקטורים עוקבים מתקיים התנאי $bc - ad = 1$, לפי הטענה הראשונה. בנוסף, אם היינו מנסים להוסיף את ווקטור הסכום בין שני ווקטורים רצופים רשומים בשורה, היינו מקבלים ווקטור נוסף עבורו $x \geq y$, והסיבה היחידה שלא רשומים אותו היא שעבור ווקטור זה $x > n$, לכן בהכרח $c + d > n$. גם ההפך נכון: כל זוג ווקטורים שמקיים את תנאי השאלה יופיע בשורה לפי טענה 3.

ובכן, עבור הווקטורים שיהיו רשומים בשורה בשלב זה, בדיוק הזוגות הרצופים מקיימים את נתוני השאלה בניסוח הווקטורי. בנוסף, זה בדיוק הנקודות שסומנו בצירוף חוץ מנקודות שהן כפולות של נקודות יותר קרובות לראשית שסומנו בצירוף,

על מנת לחשב את הזוויות בין הווקטורים בתמונה נזכיר נוסחה טריגונומטרית:

$$\tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \cdot \tan \alpha}$$



מכאן נסיק שאם יש שני ווקטור עם קואורדינטות חיוביות: שאחד מהם (a, c) ומעליו (b, d) וזוויות השיפועים שלהם הן α ו- β בהתאמה, כאשר $\tan \alpha = \frac{a}{c}$, $\tan \beta = \frac{b}{d}$, אז

$$\tan(\beta - \alpha) = \frac{\frac{b}{d} - \frac{a}{c}}{1 + \frac{b}{d} \cdot \frac{a}{c}} = \frac{bc - ad}{cd + ab}$$

אם שני הווקטורים התקבלו כווקטורים עוקבים בתהליך פארי שתיארנו, מתקבל שטאנגנס הזווית בינם הוא $\frac{1}{cd + ab}$.

נזכיר גם עוד אי-שוויון טריגונומטרי חשוב (ברדיאנים), שגם אותו נוכיח בסוף.

טענה 4. בתחום $0 < x < \frac{\pi}{2}$ מתקיים $x < \tan x$. יתר על כך, לכל $r < 1$ ניתן לבחור $\varepsilon > 0$

כך שלכל $0 < x < \varepsilon$ מתקיים $1 < \frac{\tan x}{x} < r$.

ובכן, עכשיו אפשר לסיים את הפתרון. כמו שראינו, הקווים מהראשית לכיוון הנקודות המסומנות כשמסדרים אותם נגד כיוון השעון, זה ווקטורים שמופיעים בשורת הווקטורים שקיבלנו בתהליך של פארי. הזוויות בין קווים סמוכים קשורות לזוגות ווקטורים $\vec{u} = (c, a)$ ו- $\vec{v} = (d, b)$, כאשר a, b, c, d זה בדיוק רביעיות של מספרים כמו שתוארו בשאלה.

טנגנסים של זוויות אלו מתקבלים מהנוסחה $\frac{1}{cd + ab}$. הטנגנסים של הזוויות גדולים

מהזוויות עצמן, ולפיכך, סכום הביטויים $\frac{1}{ab + cd}$ על כל הרביעיות תמיד גדול מ- $\frac{\pi}{4}$.

מצד שני, כאשר ניקח n מספיק גדול, אז כל הזוויות תהיינה קטנות (כי כל זווית מספיק גדולה מכילה נקודות שלמות כשהולכים מספיק רחוק). לכן עבור n גדול מספיק, היחס בין הטנגנס לזווית יהיה בין 1 לבין $1 + 10^{-N}$, ולכן סכום הטנגנסים יהיה אומנם גדול מ- $\frac{\pi}{4}$ אבל קרוב מאוד ל- $\frac{\pi}{4}$. מכאן מגיעים לתשובה: $t \leq \frac{\pi}{4}$.

נותר להוכיח את הטענות.

הוכחת טענה 1. צריך להוכיח כי לכל שני ווקטורים רצופים (x_1, y_1) (x_2, y_2) שמופיעים בשורה ברצף בסדר זה באיזשהו שלב, מתקיים $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 1$. נוכיח את זה באינדוקציה על שלבי התהליך. בהתחלה רשום $(1, 1)$ $(1, 0)$ ואכן $1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 1$.

נניח שעד שלב מסוים הדבר התקיים ובשלב מסוים בין הווקטורים (x_1, y_1) (x_2, y_2) שמקיימים את הטענה התווסף עוד ווקטור: (x_2, y_2) $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

צריך לבדוק שטענה מתקיימת גם לשני הזוגות החדשים שנוצרו. אכן:

$$x_1(y_1 + y_2) - (x_1 + x_2)y_1 = x_1 y_2 - x_2 y_1 = 1$$



הרי $x_1 y_1$ מופיע עם פלוס ועם מינוס ומתקזז. כמו כן

$$(x_1 + x_2)y_2 - x_2(y_1 + y_2) = x_1 y_2 - x_2 y_1 = 1$$

הרי $x_2 y_2$ מתקזז.

הערה. באופן דומה לטענה 1, ניתן להוכיח עוד תכונה: לכל שני ווקטורים רצופים בשורה $\vec{w} = (x, y)$ עם קואורדינטות $\vec{v} = (x_1, y_1)$ $\vec{u} = (x_2, y_2)$ בכל שלב, ולכל ווקטור $\vec{w} = (x, y)$ עם קואורדינטות שלמות שנמצא בתוך הזווית שנוצרת בין $\vec{u}$ לבין $\vec{v}$, בהכרח קיימים שני מספרים שלמים חיוביים a, b כך ש- $\vec{w} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{u}$. גם זה באינדוקציה.

בסיס האינדוקציה: $\vec{u} = (1, 1)$ $\vec{v} = (1, 0)$ ואם $\vec{w} = (x, y)$ נמצא בתוך הזווית בינם, כלומר בין הווקטור ימינה לאלכסון, אז $x > y$, ואז

$$\vec{w} = (x, y) = (x - y, 0) + (y, y) = (x - y) \cdot \vec{v} + y \cdot \vec{u}$$

צעד אינדוקציה: קודם התקיים $\vec{w} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{u}$ כש- a, b שלמים חיוביים. כצעד בתהליך הרצף $\vec{u}$ $\vec{v}$ מוחלף ברצף $\vec{u}$ $\vec{v} + \vec{u}$.

מתקיים אחד מ-3 מקרים: $a < b$, או $a = b$, או $a > b$.

• אם $a < b$, אז $\vec{w} = a \cdot (\vec{v} + \vec{u}) + (b - a) \cdot \vec{u}$, כלומר התנאי ממשיך להתקיים.

• אם $a = b$, אז $\vec{w} = a \cdot (\vec{v} + \vec{u})$, כלומר כפולה של $\vec{v} + \vec{u}$.

• אם $a > b$, אז $\vec{w} = (a - b) \cdot \vec{v} + a \cdot (\vec{v} + \vec{u})$, כלומר התנאי ממשיך להתקיים.

ובכן, בכל מקרה, אם $\vec{w}$ לא כפולה של אחד הווקטורים אז היא מתקבלת בתור סכום עם מקדמים שלמים חיוביים של שני הווקטורים שהוא נמצא בינם.

הוכחת טענה 2. צריך להוכיח כי בתהליך שתואר ניתן לקבל כל ווקטור $\vec{w} = (x, y)$ עבור $x \geq y \geq 1$ בתנאי ש- x, y מספרים שלמים וזרים. כל עוד הווקטור (x, y) עוד לא התקבל, הוא נמצא בזווית בין שני ווקטורים רצופים בשורה $\vec{v}, \vec{u}$ וכמו שעכשיו הסברנו ניתן לבטא אותו בתור $\vec{w} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{u}$, כש- a, b שלמים חיוביים. ניתן להכניס בין שני הווקטורים $\vec{v}, \vec{u}$ את סכומם, ואז טענה מסוג זה עדיין נכונה (אם $\vec{w}$ אינו כפולה של $\vec{v} + \vec{u}$), אבל סכום המקדמים $a + b$ קטן בכל פעולה כזו. מכיוון שמספר שלם חיובי לא ניתן להקטין אינסוף פעמים, אז בשלב מסוים בשורה יופיע ווקטור ש- $\vec{w} = (x, y)$ הוא כפולה שלו. אבל מכיוון ש- x ו- y זרים, אז הווקטור שיופיע חייב להיות בדיוק $\vec{w}$.

הוכחת טענה 3. צריך להוכיח כי כל שני ווקטורים עם קואורדינטות חיוביות $\vec{u} = (x_1, y_1)$ $\vec{v} = (x_2, y_2)$ המקיימים את $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 1$ יופיעו בשורה ברצף בשלב מסוים.



נניח שבשלב מסוים הופיע בשורה הווקטור $\vec{u}$, ובהמשך הופיע מימינו אבל לא ברצף ווקטור $\vec{v}$ (במקרה שזה סדר הופך, ההוכחה היא דומה מאוד). הווקטור $\vec{v}$ כשהוא הופיע יופיע בין הווקטורים $\vec{r} = (x_3, y_3)$ ו- $\vec{s} = (x_4, y_4)$. אז בעצם $\vec{v} = \vec{r} + \vec{s}$

$$\text{אז } \frac{y_1}{x_1} < \frac{y_3}{x_3}, \frac{y_4}{x_4} \text{ ולכן}$$

$$0 < \frac{y_3}{x_3} - \frac{y_1}{x_1}, \quad 0 < \frac{y_4}{x_4} - \frac{y_1}{x_1}$$

ולאחר כפל במכנה

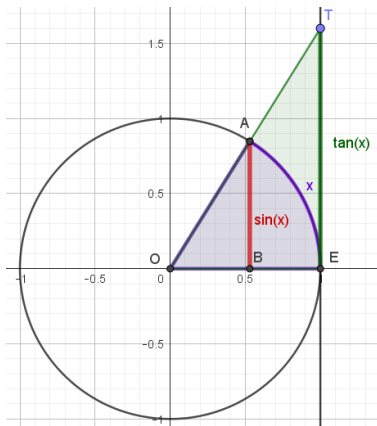
$$0 < x_1 y_3 - x_3 y_1, \quad 0 < x_1 y_4 - y_1 x_4$$

כלומר $x_1 y_3 - x_3 y_1$, $x_1 y_4 - y_1 x_4$ הם מספרים שלמים חיוביים. נסכום אותם ונקבל כי

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = x_1 (y_3 + y_4) - y_1 (x_3 + x_4) = x_1 y_3 - x_3 y_1 + x_1 y_4 - y_1 x_4$$

הוא לפחות 2.

צריך גם להוכיח שכל הווקטורים (x, y) שיופיע בין $\vec{u}$ לבין $\vec{v}$ בהמשך התהליך מקיימים $x \geq x_1 + x_2$. זה ברור באינדוקציה, אחרי ששני הווקטורים יופיעו, הווקטור הראשון שיופיע בינם יקיים $x = x_1 + x_2$, כי הוא $\vec{u} + \vec{v}$, ובהמשך כל ווקטור שיופיע בינם הוא גם סכום של שני הווקטורים כבר היה בין $\vec{u}$ לבין $\vec{v}$, ולכן ה- x שלו הוא לפחות $x_1 + x_2$, והוא יתווסף לווקטור החדש.



הוכחת טענה 4. צריכים להוכיח אי-שוויון $x < \tan x$ בתחום $0 < x < \frac{\pi}{2}$, ושיחס בן האגפים קרוב ל-1 כאשר x קרוב ל-0. ניתן לעשות זאת באמצעות חשבון דיפרנציאלי או גבולות, אבל אנחנו נסביר את הטענה ישירות מההגדרה הגיאומטרית. כמובן חשוב להזכיר שאי-שוויון זה וגם בגרסה המורחבת שלו:

$$\sin x < x < \tan x$$

מתקיים כשמודדים את x ברדיאנים ולא במעלות.

נסמן ב-O את ראשית הצירים ונצייר את מעגל היחידה עם מרכז ב-O. תהי E הנקודה הימנית של המעגל. נמדוד קשת AE באורך x מנקודה E נגד כיוון השעון. OA פוגש את המשיק ב-E בנקודה T. המרחק מנקודה A לציר ה- x שווה ל- $\sin x$ לפי הגדרה של סינוס, ולכן כבר רואים ש- $\sin x < x$ הרי המרחק הקצר ביותר מנקודה A לציר אופקי לא מתקבל כשהולכים בקשת מעגלית אלא כשהולכים בקטע ישר אנכי. נשים לב ששטח המשולש OET



הוא $\frac{OE \cdot ET}{2} = \frac{1 \cdot \tan x}{2}$, ושטח של הגזרה OEA שווה ל- $\frac{x}{2}$ אבל המשולש מכיל את הגזרה, וזה נותן אי-שוויון.

נחלק את כל האגפים של אי-שוויון ב- $\tan x$ ונקבל $\cos x < \frac{x}{\tan x} < 1$. אבל עבור x שקרוב ל-0 נקבל ש- $\cos x$ קרוב מאוד ל-1, ולכן גם היחס בין x לבין $\tan x$ קרוב מאוד ל-1.