

8.12.2021

**האולימפיאדה הארצית ע"ש פרופ' גיליס התשפ"ב**

הערות כלליות:

השאלון הוא בן שבע שאלות.

משך הזמן לכתיבת הפתרונות הוא חמש שעות.

1. בחדר נמצאים מספר אנשים, חלקם תמיד משקרים והאחרים תמיד אומרים את האמת. הגילאים של כולם שונים. כל אחד מהם אומר אחד מההיגדים הבאים:

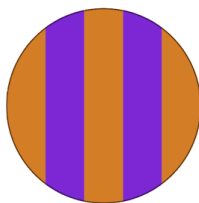
"בחדר זה יש מספר שווה של דוברי אמת מבוגרים ממני ושל דוברי שקר צעירים ממני"  
או

"בחדר זה יש מספר שווה של דוברי שקר מבוגרים ממני ושל דוברי אמת צעירים ממני"  
מהו המספר המקסימלי האפשרי של דוברי אמת שיש בחדר?  
מצאו דוגמה בה מתקבל המספר המקסימלי והראו שלא יתכן מספר גדול יותר.

2. מספרים ממשיים  $a, b, c, d, e, f, k, m$  מקיימים  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = k$  וגם

$$ad = be = cf \quad \text{וגם} \quad \frac{b}{c} + \frac{d}{e} + \frac{f}{a} = m$$

בטאו את  $\frac{a}{c} + \frac{c}{e} + \frac{e}{a} + \frac{b}{d} + \frac{d}{f} + \frac{f}{b}$  באמצעות  $k$  ו- $m$ .



3. יהא  $w$  מעגל בעל קוטר 5. העבירו 4 ישרים שמחלקים את  $w$  ל-5 "רצועות" שרוחב כל אחת מהן הוא 1. את הרצועות הללו צבעו בכתום ובסגול לסירוגין, כמתואר בציור. איזה שטח גדול יותר, הכתום או הסגול?

4. מצאו את כל השלשות  $(a, b, c)$  של מספרים שלמים עבורן למשוואה

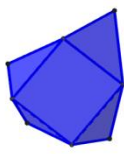
$$x^3 - a^2x^2 + b^2x - ab + 3c = 0$$

יש שלושה פתרונות שלמים שונים  $x_1, x_2, x_3$  שהם זרים בזוגות (כלומר, לאף שניים מבין הפתרונות אין מחלק משותף גדול מ-1).



5. מרובע קמור מנייר ABCD יקרא **מתקפל**, אם קיימות נקודות P, Q, R, S על החלק הפנימי של הצלעות AB, BC, CD, DA בהתאמה, כך שאם נקפל פנימה את כל המשולשים SAP, PBQ, QCR, RDS, הם יכסו בדיוק את המרובע PQRS. כלומר, אם הקיפולים של המשולשים יכסו את המרובע PQRS אך לא יעלו זה על זה.

הוכיחו שאם המרובע ABCD מתקפל, אז AC מאונך ל-BD או ש-ABCD טרפז.



6. יהיו  $x, y, z$  מספרים אי-שליליים. הוכיחו כי :

$$\begin{aligned} & \sqrt{(2x+y)(2x+z)} + \sqrt{(2y+x)(2y+z)} + \sqrt{(2z+x)(2z+y)} \geq \\ & \geq \sqrt{(x+2y)(x+2z)} + \sqrt{(y+2x)(y+2z)} + \sqrt{(z+2x)(z+2y)}. \end{aligned}$$

7. גנדלף (הקוסם) ובילבו (העוזר של הקוסם) מראים קסם לניצן (הצופה). בזמן שגנדלף יוצא מהחדר, ניצן בוחר מספר שלם בין 1 ל- $2^{2022}$  ומראה אותו לבילבו. בילבו כותב שורה ארוכה של  $N$  ספרות על הלוח, כאשר כל ספרה היא 0 או 1. אחרי זה ניצן יכול, אם הוא רוצה, להחליף בין שתי ספרות סמוכות בשורה, אבל רק פעם אחת. אחרי זה גנדלף חוזר לחדר, מסתכל על השורה ומנחש את המספר שניצן בחר.

האם בילבו וגנדלף יכולים להמציא אסטרטגיה שתאפשר לגנדלף תמיד לנחש נכון את המספר ללא תלות בהתנהגות של ניצן,  
 א. עבור  $N = 2500$  ?  
 ב. עבור  $N = 2030$  ?  
 ג. עבור  $N = 2040$  ?

**בהצלחה!**