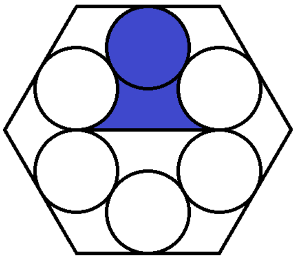
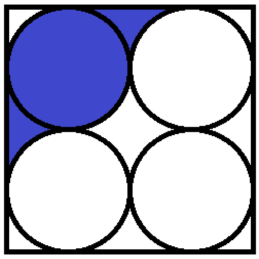
21.12.16

האולימפיאדה הארצית על שם פרופ' גיליס, תשע"ז

1. א. בציור הימני מופיע ריבוע, שבתוכו נמצאים 4 מעגלים. רדיוסי המעגלים שווים זה לזה, וכל מעגל משיק לשני מעגלים אחרים וגם לשתיים מצלעות הריבוע. מצאו את היחס בין שטח החלק הכחול לשטח החלק הלבן של הריבוע.

ב. בציור השמאלי מופיע משושה, שבתוכו נמצאים 6 מעגלים בעלי רדיוס זהה. כל מעגל משיק לשני מעגלים אחרים וגם לצלע אחת של המשושה, באמצעה. מצאו את היחס בין שטח החלק הכחול לשטח החלק הלבן של המשושה.





2. נסמן ב-$\mathrm{P(n)}$ את מכפלת הספרות של המספר n. לדוגמה, $\mathrm{P}(1948) = 1 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 8 = 288$.

א. חשבו את $\mathrm{P}(1) + \mathrm{P}(2) + \mathrm{P}(3) + \cdots + \mathrm{P}(2016)$.

ב. מצאו את הערך המקסימלי של $\frac{\mathrm{P(n)}}{\mathrm{n}}$, כאשר $2016 \le \mathrm{n} \le 5777$.

3. נתונה כמות גדולה של משולשים ישרי זווית חופפים. אורכי הצלעות בכל משולש הן 3, 4 ו-5. כמה משולשים כאלה, לכל היותר, אפשר למקם בתוך ריבוע 20×20, כך שהם לא יעלו זה על זה?

4. שלושה מספרים רציונאליים p, q ו-x מקיימים את המשוואה $p^2 - x \cdot q^2 = 1$. הוכיחו כי קיימים מספרים שלמים a ו-b המקיימים $\mathrm{q} = \frac{2ab}{a^2-xb^2}$ ו-$\mathrm{p} = \frac{a^2+xb^2}{a^2-xb^2}$.

5. נתון מחומש משוכלל $ABCDE$. הנקודה X נמצאת על המעגל החוסם שלו, על גבי הקשת AE. הוכיחו כי $|AX| + |CX| + |EX| = |BX| + |DX|$ (כאשר $|AX|$ הוא אורך הקטע AX, וכך הלאה).

6. נסמן ב-$\mathbb{Q}$ את קבוצת המספרים הרציונאליים. נתונה פונקציה $f: \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, כלומר לכל שני מספרים רציונאליים x ו-y מוגדר מספר רציונאלי $f(x, y)$. נתון ש:

- לכל 4 מספרים x_1, x_2, y_1, y_2, מתקיים: $f(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}) \le \frac{f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2)}{2}$.
- $f(0,0) < 0$.
- לכל זוג x, y של מספרים המקיימים $x^2 + y^2 > 100$, מתקיים: $f(x, y) > 1$.

הוכיחו שקיים מספר רציונאלי חיובי b, כך שלכל x, y מתקיים:

$.f(x,y) \geq b \cdot \sqrt{x^2+y^2} - \frac{1}{b}$

7. נתונה טבלה בת m שורות ו-n עמודות. בכל משבצת בטבלה כתוב מספר שלם. רחבעם ואשר משחקים במשחק הבא: בתחילת כל תור, רחבעם רשאי לבחור שתי עמודות כלשהן ולהחליף ביניהן. לאחר מכן, רחבעם בוחר מספר שורות ומוסיף בתחתית הטבלה שורה חדשה, שכל אחד מאיבריה הוא סכום האיברים שנמצאים מעליו בשורות שנבחרו. כעת, אשר בוחר אחת מבין השורות שנבחרו על ידי רחבעם, ומוחק אותה מהטבלה (כך, בסוף כל תור של אשר יש בדיוק m שורות בטבלה). בכך מסתיים התור ומתחיל תור חדש.

לדוגמה, אם בטבלה כתוב:

1 1 1

6 5 4

9 8 7

אז רחבעם יכול לבחור להחליף בין העמודה הראשונה והשלישית, ולקבל את הטבלה הבאה:

1 1 1

4 5 6

7 8 9

כעת, רחבעם יכול לבחור את השורות הראשונה והשנייה, ולקבל את הטבלה הבאה:

1 1 1

4 5 6

7 8 9

5 6 7

כעת, אשר בתורו יכול לבחור למחוק את השורה השנייה, ולקבל את הטבלה הבאה:

1 1 1

7 8 9

5 6 7

הראו שרחבעם תמיד יכול לגרום לכך, שלאחר מספר סופי של תורות, כל איבר בטבלה לא יהיה קטן מהאיבר שעומד מימינו.

בהצלחה!