31.12.17

האולימפיאדה הארצית על שם פרופ׳ גיליס, תשע״ח

1. במעגל יושבים n אנשים, כל אחד מהם הוא שקרן או דובר אמת. האנשים מסתכלים למרכז המעגל. שקרן תמיד משקר, ודובר אמת תמיד אומר אמת. כל אחד מהאנשים יודע בדיוק מי דובר שקר ומי דובר אמת. כל אחד מהאנשים אומר שהאיש שיושב שני מקומות לשמאלו (זאת אומרת ליד האיש שיושב לידו), הוא דובר אמת. ידוע שבמעגל יש לפחות שקרן אחד, ולפחות דובר אמת אחד.
   א. האם ייתכן ש-$n = 2017$?
   ב. האם ייתכן ש-$n = 5778$?

2. סדרה חשבונית היא סדרה שאיברה ה-n הוא $a_n = a_0 + n \cdot d$, כאשר $n = 1,2,3,\dots$ וכאשר a_0 ו-d הם קבועים. סדרה הנדסית היא סדרה שאיברה ה-n הוא $b_n = b_0 \cdot q^n$, כאשר $n = 1,2,3,\dots$ וכאשר b_0 ו-q הם קבועים.
   א. האם נכון שכל סדרה חשבונית (אינסופית) של מספרים **שלמים** מכילה סדרה הנדסית (אינסופית)? כלומר, האם תמיד ניתן לבחור תת-סדרה של איברי הסדרה החשבונית, כך שתת-סדרה זו היא סדרה הנדסית?
   ב. האם נכון שכל סדרה חשבונית (אינסופית) של מספרים **ממשיים** מכילה סדרה הנדסית (אינסופית)? כלומר, האם תמיד ניתן לבחור תת-סדרה של איברי הסדרה החשבונית, כך שתת-סדרה זו היא סדרה הנדסית?

3. מהם הערכים המקסימליים והמינימליים של הביטוי $\frac{|a+b|+|a+c|+|b+c|}{|a|+|b|+|c|}$, כאשר b, a ו-c הם מספרים ממשיים כלשהם?

4. למספר התלת-ספרתי 999 ישנה תכונה מיוחדת – הוא מתחלק ב-27, וגם סכום ספרותיו מתחלק ב-27. גם למספר הארבע-ספרתי 5778 יש את התכונה המיוחדת הזו – הוא מתחלק ב-27, וגם סכום ספרותיו מתחלק ב-27. לכמה מספרים ארבע ספרתיים יש את התכונה הזו?

5. הסדרה a_n מוגדרת עבור כל $n \geq 10$ על ידי כלל הנסיגה הבא: $a_{10} = 5778$, ולכל $n \geq 10$ אם $a_n = 0$ אז $a_{n+1} = 0$, ואם $a_n \neq 0$ אז a_{n+1} הוא המספר שייצוגו בבסיס $n+1$ זהה לייצוג של המספר $a_n - 1$ בבסיס n. לדוגמה

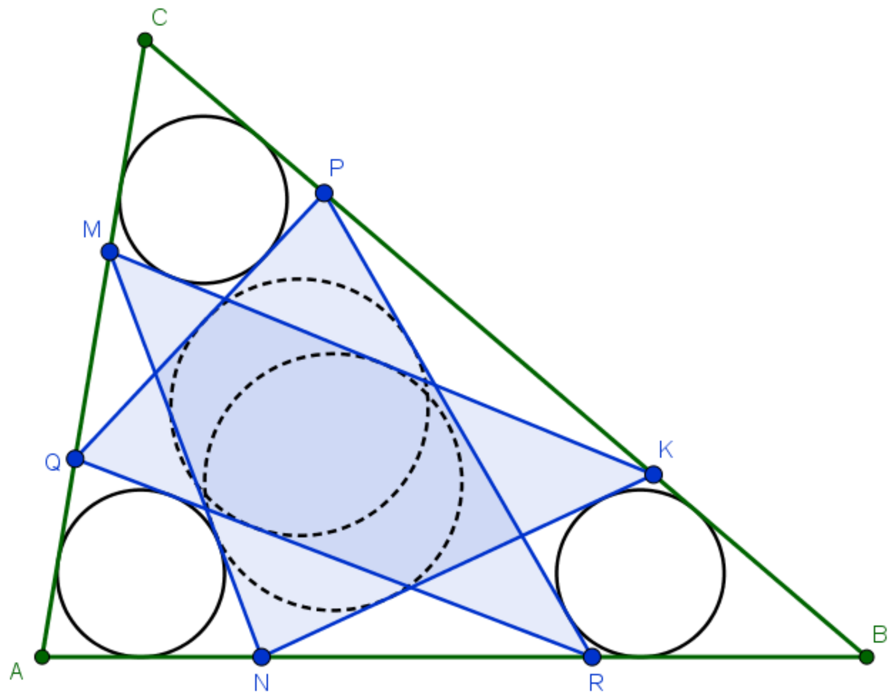
$$a_{11} = 5 \cdot 11^3 + 7 \cdot 11^2 + 7 \cdot 11^1 + 7 \cdot 11^0 = 7586,$$

$$a_{12} = 5 \cdot 12^3 + 7 \cdot 12^2 + 7 \cdot 12^1 + 6 \cdot 12^0 = 9738.$$

   א. האם קיים מספר שלם $n \geq 10$, עבורו $a_n = 0$?
   ב. האם $a_{1,000,000} = 0$?

ג. האם $a_{100^{100^{100}}} = 0$?

6. בפינות המשולש ABC נמצאים שלושה מעגלים בעלי רדיוס זהה, שכל אחד מהם משיק לשתי צלעות. קודקודי המשולש MNK נמצאים על צלעות שונות של המשולש ABC, וכל צלע של MNK משיקה לאחד המעגלים. גם קודקודי המשולש PQR נמצאים על צלעות שונות של המשולש ABC, וכל צלע של PQR משיקה לאחד המעגלים (ראו ציור מטה). הוכיחו כי לשני המעגלים החסומים של המשולשים MNK ו-PQR רדיוס זהה.



7. כיסוי אחיד של המספרים הטבעיים מ-1 עד n הוא אוסף סופי של תתי-קבוצות של $\{1,2,3,\dots,n\}$, כך שכל מספר נמצא באותה כמות של תתי-קבוצות. תת-קבוצה מסוימת יכולה להיבחר יותר מפעם אחת. כיסוי חייב להכיל לפחות קבוצה אחת, והוא יכול להכיל את הקבוצה הריקה. לדוגמה, $(\{1\},\{1\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\})$ הוא כיסוי אחיד של 1 עד 4. גם הכיסוי שמכיל רק את הקבוצה הריקה הוא כיסוי אחיד (כל מספר מופיע בדיוק באפס תתי-קבוצות באיחוד זה). בהינתן שני כיסויים אחידים של 1 עד n נגדיר כיסוי אחיד חדש של 1 עד n על ידי לקיחת הקבוצות משני האיחודים. לכיסוי החדש הזה נקרא סכום, ונסמן $\oplus$. לדוגמה:

$$(\{1\},\{1\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}) \oplus (\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}) =$$

$$(\{1\},\{1\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}) \,.$$

כיסוי אחיד נקרא אי-פריק אם הוא לא סכום של שני כיסויים אחידים.

הוכיחו שלכל n, קיים מספר סופי של כיסויים אחידים אי-פריקים של 1 עד n.

בהצלחה!