



האולימפיאדה הארצית ע"ש פרופ' גיליס ה'תשפ"ד

נהלים:

השאלון הוא בן שבע שאלות.

משך הבחינה הוא 5 שעות.

יש להוכיח כל טענה ולנמק הכל באופן מלא.

אין להשתמש במחשבון.

יש לציית להוראות המשגיחים.

1. פתרו את מערכת המשוואות הבאה:

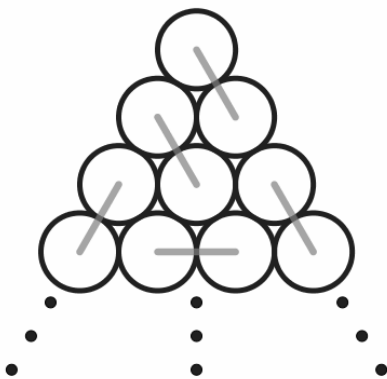
$$\begin{cases} 5x + 5y + 5xy - 2xy^2 - 2x^2y = 20 \\ 3x + 3y + 3xy + xy^2 + x^2y = 23 \end{cases}$$

2. מספר שלם חיובי x מקיים $\left\{\frac{x}{3}\right\} + \left\{\frac{x}{5}\right\} + \left\{\frac{x}{7}\right\} + \left\{\frac{x}{11}\right\} = \frac{248}{165}$

מצאו את כל האפשרויות לערכו של $\left\{\frac{2x}{3}\right\} + \left\{\frac{2x}{5}\right\} + \left\{\frac{2x}{7}\right\} + \left\{\frac{2x}{11}\right\}$

הערה. $\{y\}$ מסמן את החלק השברי של y , כלומר המספר האי-שלילי הקטן ביותר כך ש- $y - \{y\}$

שלם. לדוגמה: $\{3.14\} = 0.14$, וכן $\{6\} = 0$.



3. משולש מורכב מתאים עגולים המסודרים ב-5784 שורות: בשורה ראשונה תא אחד, בשורה השנייה שני תאים, וכך הלאה (ראו ציור).

מחלקים את התאים לזוגות של תאים סמוכים (מעגלים שנוגעים זה

בזה), כל תא משתייך לזוג אחד בדיוק. זוג תאים סמוכים נקרא אלכסוני

אם שני התאים בזוג לא נמצאים באותה השורה. מהי הכמות המינימלית

האפשרית של זוגות אלכסוניים בחלוקה?

בציור מוצגת חלוקה אפשרית של התאים לזוגות.

4. משולש ABC חסום במעגל שמרכזו O . נסמן את השיקוף של O ביחס לגבהים של המשולש ב- U, V, W .

כאשר U הוא השיקוף ביחס לגובה מ- A , V הוא השיקוף ביחס לגובה מ- B ו- W הוא השיקוף ביחס לגובה

מ- C . ישר ℓ_A עובר דרך A ומקביל ל- VW והישרים ℓ_B, ℓ_C הוגדרו באופן דומה. הראו שהישרים

ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C נפגשים בנקודה אחת.

המשך בעמוד הבא

5. בהינתן מספר טבעי $a_1 > 2$, נגדיר סדרה של מספרים טבעיים על ידי נוסחת הנסיגה $a_{n+1} = a_n^n - 1$. לכל מספר טבעי $k > 1$ נגדיר את $p(k)$ להיות המחלק הראשוני המינימלי של k . עבור אילו ערכים של a_1 קיים מספר טבעי M כך שלכל n יתקיים $p(a_n) < M$?

6. המרובע ABCD חסום במעגל. נסמן ב- $\omega_A, \omega_B, \omega_C, \omega_D$ את המעגלים החסומים במשולשים DAB, ABC, BCD, CDA בהתאמה. המשיק החיצוני המשותף של ω_A ו- ω_B , שאינו הישר AB, חותך את המשיק החיצוני המשותף של ω_A ו- ω_D , שאינו הישר AD, בנקודה A'. באופן דומה, המשיק החיצוני המשותף של ω_C ו- ω_D , שאינו הישר CD, חותך את המשיק החיצוני המשותף של ω_C ו- ω_B , שאינו הישר BC, בנקודה C'. הוכיחו כי הישרים A'A ו-C'C מקבילים זה לזה.

הערה. משיק משותף לשני מעגלים נקרא חיצוני אם שני המעגלים נמצאים באותו הצד של הישר.

7. באחת מהמשבצות של לוח משבצות אינסופי נמצא צריח, משבצת אחרת בלוח סומנה בכחול. ב- n משבצות נוספות נמצאים מחסומים – אסור לצריח לנחות על משבצות אלו או לעבור דרכן. נתון שאפשר להעביר את הצריח מהמשבצת ההתחלתית למשבצת הכחולה באמצעות מספר מהלכים. האם אפשר בכל מקרה לעשות זאת (לכל n ולכל בחירה אפשרית של מיקומי המחסומים, המשבצת ההתחלתית והמשבצת הכחולה)?

(א) באמצעות $1.99n + 100$ מהלכים לכל היותר?

(ב) באמצעות $2n - 2\sqrt{3n} + 100$ מהלכים לכל היותר?

הערה. בכל מהלך, הצריח יכול לנוע בקו אופקי או אנכי.

בהצלחה!