# **האולימפיאדה הארצית ע"ש פרופ' גיליס ה'תשפ"ד – פתרונות**

**1.** פתרו את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} 5x+5y+5xy-2xy^2-2x^2y=20 \\ 3x+3y+3xy+xy^2+x^2y=23 \end{cases}$$

**תשובה.** $x,y=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

**פתרון.** נסמן $s=x+y$ , $p=xy$ . אז מה שנתון בעצם הוא

$$\begin{cases} 5s+5p-2sp=20 \\ 3s+3p+sp=23 \end{cases}$$

כעת, נסמן $u=s+p$ , $v=sp$ . אז המערכת שקולה ל-

$$\begin{cases} 5u-2v=20 \\ 3u+v=23 \end{cases}$$

אם נוסיף למשוואה הראשונה את המשוואה השנייה פעמיים, נקבל $11u=66$, כלומר $u=6$. אם נציב את זה בשתי המשוואות הנתונות, נקבל

$$\begin{cases} 30-2v=20 \\ 18+v=23 \end{cases}$$

כל אחת משתי המשוואות שקולה לכך ש- $v=5$.

כעת, ניתן לחזור ל- $s$ ו- $p$ . שני המספרים הם השורשים של משוואה ריבועית

$$(z-s)(z-p)=0$$

שברישום אחר היא $z^2-(s+p)z+sp=0$ , כלומר $z^2-6z+5=0$ , כלומר $(z-1)(z-5)=0$ .
כלומר, $s$ ו- $p$ הם 1 ו-5 באיזשהו סדר.
המספרים $x$ ו- $y$ הם השורשים של משוואה ריבועית

$$(z-x)(z-y)=0$$

שניתן לרשום אותה גם בצורה $z^2-z(x+y)+xy=0$ , כלומר $z^2-sz+p=0$ , וכמו שראינו לזה

יש שתי גרסאות: $z^2-z+5=0$ או $z^2-5z+1=0$ .

למשוואה $z^2-z+5=0$ אין שורשים, כי הדיסקרימיננטה $1-4\cdot5$ שלילית.

בגרסה האחרת, נקבל $x,y=\dfrac{5\pm\sqrt{5^2-4}}{2}=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$ .

**2.** מספר שלם חיובי $x$ מקיים $\left\{\frac{x}{3}\right\}+\left\{\frac{x}{5}\right\}+\left\{\frac{x}{7}\right\}+\left\{\frac{x}{11}\right\}=\frac{248}{165}$.

מצאו את כל האפשרויות לערכו של $\left\{\frac{2x}{3}\right\}+\left\{\frac{2x}{5}\right\}+\left\{\frac{2x}{7}\right\}+\left\{\frac{2x}{11}\right\}$.

**הערה.** $\{y\}$ מסמן את החלק השברי של $y$, כלומר המספר האי-שלילי הקטן ביותר כך ש- $y-\{y\}$ שלם.

לדוגמה: $\{3.14\}=0.14$, וכן $\{6\}=0$.

תשובה. $\frac{166}{165}$

**פתרון.** נשים לב כי $\left\{\frac{x}{3}\right\}=\frac{a}{3}$, כאשר $a$ שווה לשארית המתקבלת מחלוקה של $x$ ב-3.

באופן דומה, $\left\{\frac{x}{5}\right\}=\frac{b}{5}$, $\left\{\frac{x}{7}\right\}=\frac{c}{7}$, ו- $\left\{\frac{x}{11}\right\}=\frac{d}{11}$ כאשר $c,b$ ו- $d$ הן השאריות המתקבלות לאחר חלוקה של $x$ ב-5, 7 ו-11 בהתאמה. ובכן, ניתן לרשום את המשוואה בסימונים אלה בתור

$$\frac{a}{3}+\frac{b}{5}+\frac{c}{7}+\frac{d}{11}=\frac{248}{3\cdot 5\cdot 11}$$

הרי $11\cdot 3\cdot 5=11\cdot 15=165$. אם נכפיל את שני אגפי המשוואה ב-165, נקבל באגף ימין מספר שלם, ובאגף שמאל מספר שלם ועוד $\frac{c}{7}\cdot 165$, כאשר $0\le c\le 6$. זה יכול להתקיים רק אם $\frac{c}{7}\cdot 165$ שלם, וזה רק אם $c=0$. במילים אחרות, $x$ מתחלק ב-7, ואת המשוואה אפשר לקצר ל-

$$\frac{a}{3}+\frac{b}{5}+\frac{d}{11}=\frac{248}{3\cdot 5\cdot 11}$$

נכפיל במכנה, ונקבל את המשוואה

$$a\cdot 55+b\cdot 33+d\cdot 15=248$$

כעת, נסתכל על שארית החלוקה ב-3. מכיוון ש-15, 33, ו-54 מתחלקים ב-3, שארית החלוקה של אגף שמאל תהיה שווה לשארית החלוקה של $a$. באגף ימין, שארית החלוקה היא 2. אז שארית החלוקה של $a$ ב-3 היא 2. במילים אחרות, $x=3m+2$, עבור $m$ שלם חיובי כלשהו.

נסתכל על שארית החלוקה ב-5; מכיוון ש-15, 30, ו-55 מתחלקים ב-5, באגף שמאל יש $3b$ ובאגף ימין 3, אז שארית החלוקה של $b$ ב-5 היא 1. במילים אחרות, $x=5n+1$.

נסתכל על שארית החלוקה ב-11; מכיוון ש-11, 33 ו-55 מתחלקים ב-11, באגף שמאל יש $4d$ ובאגף ימין 6. לכן, $4d$ צריך להיות מספר שנותן שארית 6 לאחר החלוקה ב-11 (למשל 6, 17, 28, 39). מכיוון ש- $4d$ מתחלק ב-4, $4d$ צריך להיות מהצורה $28+44\cdot l$ (למשל 28, 72, 116). נזכור ש-$d<11$, אז $4d<44$, לכן $4d=28$ (כי כל מספר אחר מהצורה $28+44\cdot l$ יהיה גדול מ-44). כלומר $d=7$, ובמילים אחרות, $x=11k+7$.

לבסוף, קיבלנו

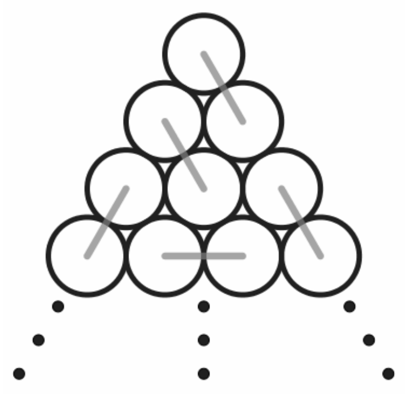
$$2x=2(3m+2)=3(2m+1)+1=3M+1$$

$$2x=2(5n+1)=5(2n)+2=5N+2$$

$$2x=2(11k+7)=11(2k+1)+3=11K+3$$

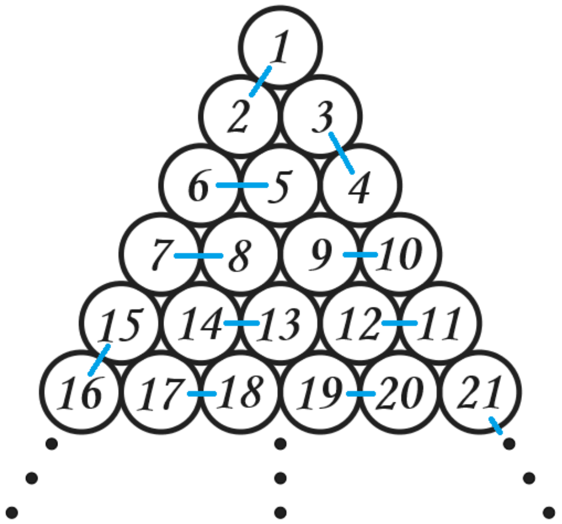
וכן $2x$, כמו $x$, מתחלק ב-7. ובכן, מצאנו את השאריות המתקבלות מ-$2x$ לאחר החלוקה ב-3, 5, 7, ו-11. מכאן,

$$\left\{\frac{2x}{3}\right\}+\left\{\frac{2x}{5}\right\}+\left\{\frac{2x}{7}\right\}+\left\{\frac{2x}{11}\right\}=\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+0+\frac{3}{11}=\frac{55+2\cdot 33+3\cdot 15}{165}=\frac{55+66+45}{165}=\frac{166}{165}$$



**3.** משולש מורכב מתאים עגולים המסודרים ב-5784 שורות: בשורה הראשונה תא אחד, בשורה השנייה שני תאים, וכך הלאה (ראו ציור). מחלקים את התאים לזוגות של תאים סמוכים (מעגלים שנוגעים זה בזה), כל תא משתייך לזוג אחד בדיוק. זוג תאים סמוכים נקרא אלכסוני אם שני התאים בזוג **לא** נמצאים באותה השורה. מהי הכמות המינימלית האפשרית של זוגות אלכסוניים בחלוקה?

**תשובה.** 2892




**פתרון.** נמספר את התאים בצורה הבאה: בהתחלה התא שלמעלה, אחר כך את השורה השנייה נמספר משמאל לימין, אחרי זה את השורה השלישית נמספר מימין לשמאל, וכך הלאה. מתקדמים מלמעלה למטה, וכל פעם כשעוברים משורה לשורה הבאה, משנים את הכיוון של המספור.

המספור נותן לנו זיווג לפי הסדר: זוג של 1 עם 2, זוג של 3 עם 4, זוג של 5 עם 6, וכך הלאה. בזיווג הזה יש הרבה זוגות אופקיים. הזוגות היחידים שהם אנכיים מופיעים כשמחברים קצה של שורה לקצה של שורה אחרת. מבין השורות האלה, תמיד שורה אחת היא זוגית והשורה האחרת היא אי-זוגית. נשים לב שבשורה האי-זוגית, כשמורידים ממנה תא קיצוני, כל התאים האחרים בשורה מתחלקים לזוגות אופקיים באופן מושלם.

מצד שני, תמיד בכל שורה אי-זוגית חייבים זוג אלכסוני שנוגע בה, כי מספר אי-זוגי של תאים לא יתחלק לזוגות. לכן, כמות הזוגות האלכסוניים שווה לפחות לכמות השורות האי-זוגיות, ובדוגמה שהצגנו הכמות שווה בדיוק, לכן זו הדוגמה הטובה ביותר שיכולה להיות.

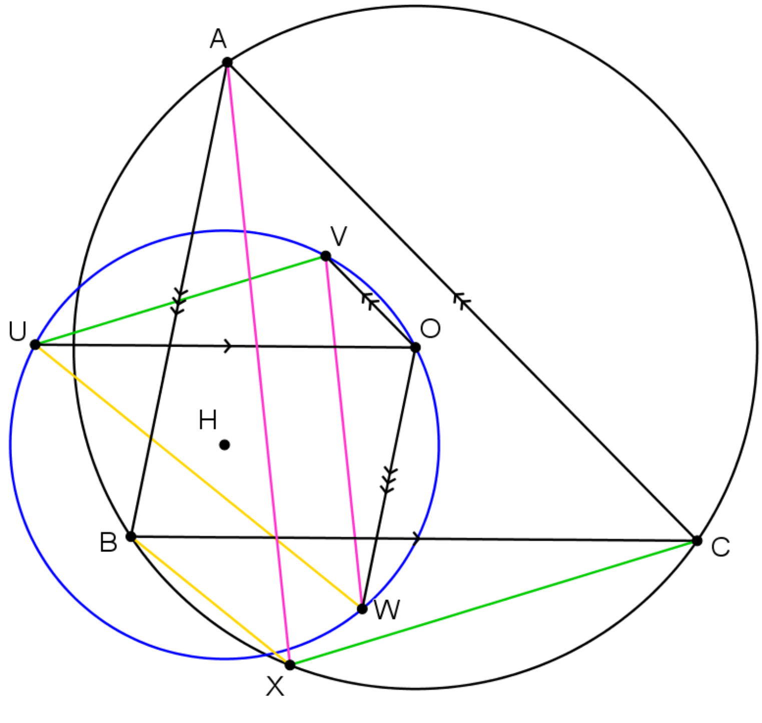
קיימות $2892 = \frac{5784}{2}$ שורות אי-זוגיות, וזו גם כמות הזוגות האלכסוניים בדוגמה שלנו.

**4.** משולש $ABC$ חסום במעגל שמרכזו $O$. נסמן את השיקוף של $O$ ביחס לגבהים של המשולש ב-$U, V, W$ כאשר $U$ הוא השיקוף ביחס לגובה מ-$A$, $V$ הוא השיקוף ביחס לגובה מ-$B$ ו-$W$ הוא השיקוף ביחס לגובה מ-$C$. ישר $\ell_A$ עובר דרך $A$ ומקביל ל-$VW$ והישרים $\ell_B, \ell_C$ הוגדרו באופן דומה. הראו שהישרים $\ell_A, \ell_B, \ell_C$ נפגשים בנקודה אחת.

פתרון: נסמן ב-$H$ את מפגש הגבהים ב-$ABC$. $U$ היא השיקוף של $O$ ביחס ל-$AH$, לכן $HU = HO$. $OU \perp AH$ ו-$AH \perp BC$, לכן $OU || BC$. באופן דומה, נקבל ש-$OV || AC$, $OW || AB$ ו-$HO = HW = HV$. נסיק כי $UVWO$ חסום במעגל שמרכזו $H$. בנוסף, נשים לב ש-

$$\angle UWV = \angle UOV = \angle ACB.$$

נסמן את החיתוך של $\ell_A$ עם $\ell_B$ ב-$X$. $XA || VW$ ו-$XB || UW$ ולכן $\angle AXB = \angle ACB$, כלומר $X$ נמצאת על המעגל החוסם של $ABC$. באופן דומה נוכיח שהחיתוך של $\ell_A$ עם $\ell_C$ נמצא על המעגל החוסם של $ABC$ ומכאן נסיק ששלושת הישרים המבוקשים נחתכים בנקודה אחת.



**5.** בהינתן מספר טבעי $a_1>2$, נגדיר סדרה של מספרים טבעיים על ידי נוסחת הנסיגה $a_{n+1}=a_n^n-1$. לכל מספר טבעי $k>1$, נגדיר את $p(k)$ להיות המחלק הראשוני המינימלי של $k$. עבור אילו ערכים של $a_1$ קיים מספר טבעי $M$ כך שלכל $n$ יתקיים $p(a_n)<M$?

**תשובה:** בדיוק כאשר $a_1$ אי-זוגי.

**פתרון:** בפתרון נשתמש במשפט הקטן של פרמה. המשפט אומר שלכל ראשוני $p$ ומספר שלם $a$, מתקיים ש-$a^p-a$ מתחלק ב-$p$. אפשר לנסח את המשפט גם אחרת: אם $a$ לא מתחלק ב-$p$ אזי $a^{p-1}-1$ מתחלק ב-$p$. ניתן לקרוא הוכחות למשפט [בויקפדיה](https://he.wikipedia.org).

נבחין בעובדה הבאה: לכל ראשוני $p$, אחד מהמספרים $a_p$ או $a_{p-1}$ מתחלק ב-$p$. אכן, $a_p=a_{p-1}^{p-1}-1$ וממשפט פרמה נקבל שאם $a_{p-1}$ לא מתחלק ב-$p$ אזי $a_p$ מתחלק ב-$p$. באופן דומה, נקבל שלכל $k$ שלם מתקיים שאחד מהמספרים $a_{k(p-1)}, a_{k(p-1)+1}$ מתחלק ב-$p$: אם $a_{k(p-1)}$ לא מתחלק ב-$p$, אזי $a_{k(p-1)}^k$ לא מתחלק ב-$p$, לכן ממשפט פרמה $\left(a_{k(p-1)}^k\right)^{p-1}-1$ מתחלק ב-$p$.

ניקח ערך של $a_1$ עבורו קיים $M$ כך שהתנאי מתקיים. אם נסמן את המספרים הראשוניים עד ל-$M$ ב-$p_1,\dots,p_k$, נקבל שלכל $n$ קיים $1\le i\le k$ כך ש-$p_i|a_n$. נשים לב שאם $a_i$ זוגי אזי $a_{i+1}$ אי-זוגי ולהיפך. כלומר, אברי הסדרה הם זוגיים ואי-זוגיים לסירוגין. לפיכך, קיים $m$ כך ש-$p(a_m)\neq 2$ ולכן לא יתכן ש-$M=3$.

נבחר $n=(p_1-1)(p_2-1)\dots(p_k-1)+1$. על פי ההבחנה שעשינו, לכל $p_i$, או ש-$a_n$ מתחלק ב-$p_i$, או ש-$a_n+1$ מתחלק ב-$p_i$. נתבונן ב-$a_{n+1}=a_n^n-1$. הוכחנו ש-$a_n$ הוא 0 או $-1$ מודולו $p_i$, אבל $n$ אי-זוגי ולכן $a_{n+1}$ הוא או $-1$ או $-2$ מודולו $p_i$. נסיק שאם $p_i\neq 2$ אזי $a_{n+1}$ לא מתחלק ב-$p_i$. נזכור שהנחנו ש-$p(a_{n+1})<M$ ולכן $a_{n+1}$ זוגי. אבל, בכל צעד הסדרה משנה זוגיות, ו-$n$ אי-זוגי, לכן $a_1$ חייב להיות אי-זוגי.

הוכחנו כי $a_1$ עבורו התנאי מתקיים חייב להיות אי-זוגי. כעת, נוכיח שאם $a_1$ הוא אי-זוגי, אז התנאי מתקיים.

במקרה זה, כל איברי הסדרה במקומות הזוגיים מתחלקים ב-2 ולא צריך לדאוג לגביהם. בשביל לראות מה קורה לאיברים במקומות האי-זוגיים, נפתח פעמיים לפי הנוסחה:

$$a_{2n+1}=a_{2n}^{2n}-1=(a_{2n-1}^{2n-1}-1)^{2n}-1$$

מודולו $a_{2n-1}$, אגף ימין שקול ל-$(-1)^{2n}-1=0$, לכן $a_{2n-1}|a_{2n+1}$.

נסיק ש-$p(a_{2n+1})\le p(a_{2n-1})$, ובאינדוקציה $p(a_{2n+1})\le p(a_1)$. לכן, במקרה הזה התנאי מתקיים עם $M=p(a_1)+1$, מש"ל.

**6.** המרובע ABCD חסום במעגל. נסמן ב- $\omega_A, \omega_B, \omega_C, \omega_D$ את המעגלים החסומים במשולשים DAB, ABC, BCD, CDA בהתאמה. המשיק החיצוני המשותף של $\omega_A$ ו- $\omega_B$, שאינו הישר AB, חותך את המשיק החיצוני המשותף של $\omega_A$ ו- $\omega_D$, שאינו הישר AD, בנקודה 'A. באופן דומה, המשיק החיצוני המשותף של $\omega_C$ ו- $\omega_D$, שאינו הישר CD, חותך את המשיק החיצוני המשותף של $\omega_C$ ו- $\omega_B$, שאינו הישר BC, בנקודה 'C. הוכיחו כי הישרים A'A ו- C'C מקבילים זה לזה.

**הערה.** משיק משותף לשני מעגלים נקרא חיצוני אם שני המעגלים נמצאים באותו הצד של הישר.

פתרון: נסמן את המרכזים של $\omega_A, \omega_B, \omega_C, \omega_D$ ב- $I_A, I_B, I_C, I_D$ בהתאמה. את המשיק המשותף החיצוני של $\omega_A, \omega_B$ ששונה מ- $AB$ נסמן ב- $l_{AB}$, באופן דומה נגדיר את $l_{BC}, l_{CD}, l_{DA}$.

נזכיר את משפט התלתן.

**משפט התלתן:** נסמן ב- $I$ את מרכז המעגל החסום במשולש $ABC$ (שהוא גם מפגש חוצי הזוויות במשולש) וב- $S$ את אמצע הקשת $\widehat{BC}$. אזי $SB = SC = SI$.

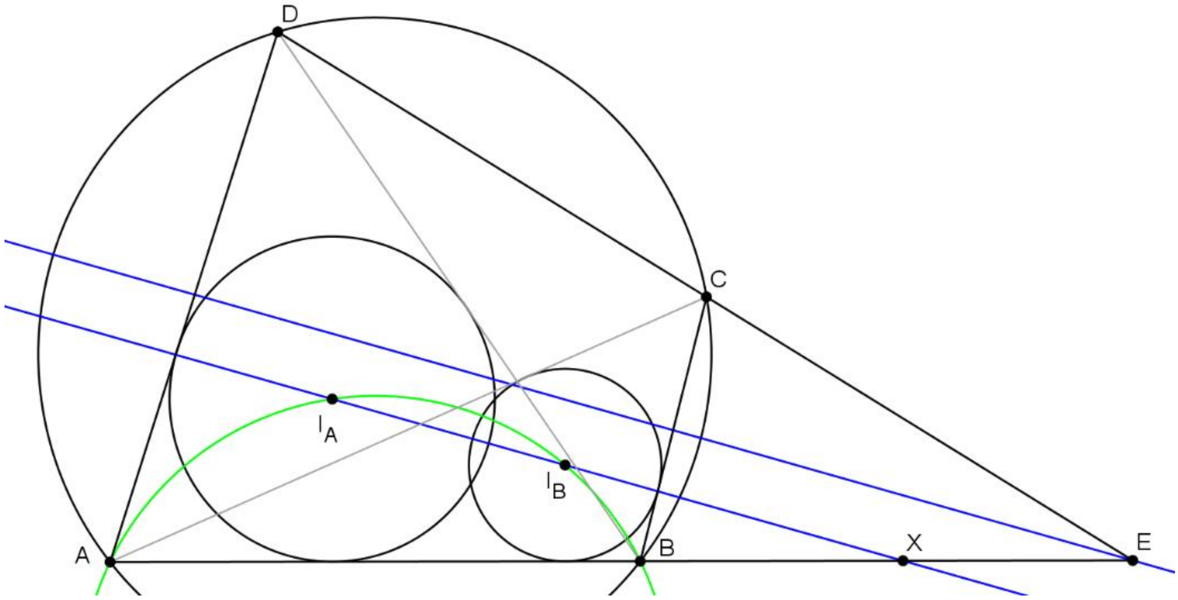
ניתן לראות את ההוכחה למשפט בסוף הפתרון.

ממשפט התלתן במשולשים $ABC, ABD$ נובע שאמצע הקשת $\widehat{AB}$, שלא מכילה את $C, D$, נמצא במרחקים שווים מ- $A, B, I_A, I_B$, לכן $ABI_BI_A$ חסום במעגל.

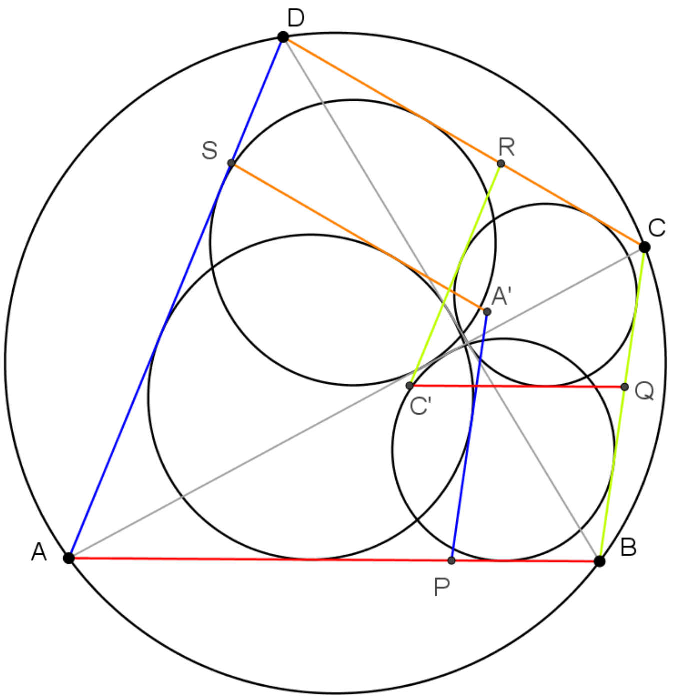
נסמן ב- $E$ את החיתוך של $AB$ עם $CD$. נטען שחוצה הזווית של $\angle AED$ מקביל ל- $I_AI_B$. נסמן ב- $X$ את החיתוך של $AB$ עם $I_AI_B$ ונחשב זוויות:

$$\angle AXI_A = \angle ABI_A - \angle BI_AX = \angle ABI_A - \angle BAI_B = \frac{1}{2}(\angle ABD - \angle BAC)$$
$$= \frac{1}{2}(\angle ABD - \angle BDC) = \frac{1}{2}\angle AED$$

וזה מוכיח את הטענה שלנו.

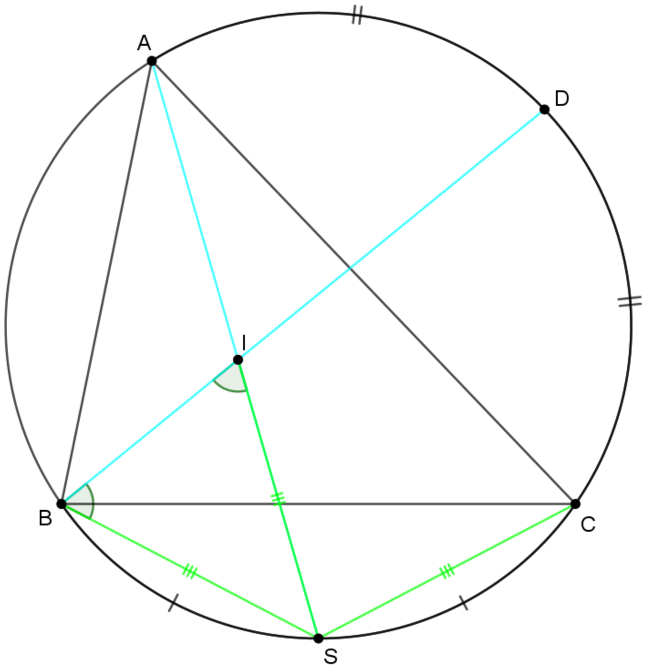


המסקנה מהטענה, היא שאם נשקף את $AB$ ביחס ל-$I_AI_B$, נקבל ישר שמקביל ל-$CD$. $I_AI_B$ הוא ישר המרכזים של $\omega_A, \omega_B$ ואילו $AB$ הוא משיק חיצוני משותף, לכן השיקוף של $AB$ ביחס ל-$I_AI_B$ הוא $l_{AB}$. לסיכום, הוכחנו ש-$l_{AB}||CD$. באופן דומה נוכיח הקבלות עם הצלעות האחרות.




נסמן את החיתוך של $l_{AD}$ עם $AB$ ב-$P$, החיתוך של $l_{CD}$ עם $BC$ ב-$Q$, החיתוך של $l_{BC}$ עם $CD$ ב-$R$ והחיתוך של $l_{AB}$ עם $AD$ ב-$S$ (ראו איור). נשים לב שבמרובעים $APA'S$ ו-$CQC'R$ כל הצלעות המתאימות מקבילות ואנחנו רוצים להוכיח שגם האלכסונים מקבילים (לא לכל שני מרובעים עם צלעות מקבילות, האלכסונים מקבילים גם הם).

שני המרובעים חוסמים מעגל, ומתברר שזהו תנאי מספיק לכך שהאלכסונים מקבילים. אכן, אם נזיז את המרובע $CQC'R$ כך ש-$C$ יתלכד עם $A'$ ולאחר מכן נמתח את המרובע המוזז $CQC'R$ כך שהמעגל החסום בו יתלכד עם המעגל החסום ב-$A'PAS$, נקבל שלאחר המתיחה המרובע יהיה חייב להתלכד עם $A'PAS$, לכן $C'$ תתלכד עם $A$. בתהליך של הזזה ומתיחה לא שינינו את הכיוון של האלכסון $CC'$ והעברנו אותו לאלכסון $AA'$, לכן הם חייבים להיות מקבילים.




הוכחה למשפט התלתן: נסמן ב-$D$ את אמצע הקשת $\overset{\frown}{AC}$. מתקיים $\overset{\frown}{BS} = \overset{\frown}{CS}$, לכן $SB = SC$. בנוסף, מתקיים $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{CD}$, לכן

$$\angle SBI = \frac{\overset{\frown}{DS}}{2} = \frac{\overset{\frown}{CS} + \overset{\frown}{CD}}{2} = \frac{\overset{\frown}{BS} + \overset{\frown}{AD}}{2} = \angle BIS$$

לכן $SB = SI$, מש"ל.

**7.** באחת מהמשבצות של לוח משבצות אינסופי נמצא צריח, משבצת אחרת בלוח סומנה בכחול. ב-$n$ משבצות נוספות נמצאים מחסומים – אסור לצריח לנחות על משבצות אלו או לעבור דרכן. נתון שאפשר להעביר את הצריח מהמשבצת ההתחלתית למשבצת הכחולה באמצעות מספר מהלכים. האם אפשר בכל מקרה לעשות זאת (לכל $n$ ולכל בחירה אפשרית של מיקומי המחסומים, המשבצת ההתחלתית והמשבצת הכחולה)

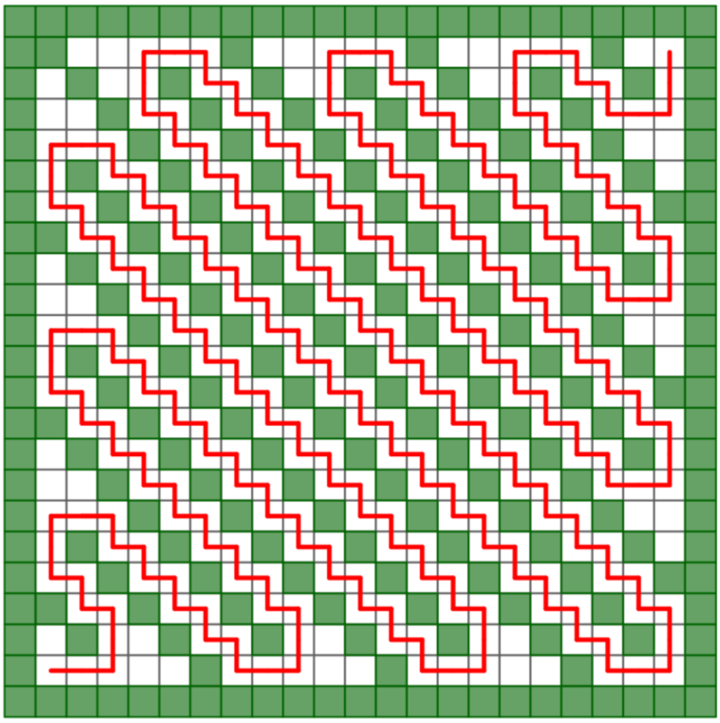
(א) באמצעות $1.99n + 100$ מהלכים לכל היותר?

(ב) באמצעות $2n - 2\sqrt{3n} + 100$ מהלכים לכל היותר?

**הערה.** בכל מהלך, הצריח יכול לנוע בקו אופקי או אנכי.

**פתרון.** (א) קיים $n$ עבורו בחירת מיקומי מחסומים מסויימת תוביל לכך שהצריח יזדקק ליותר מ-$1.99n+100$ מהלכים. כדי לראות זאת, נתאר את בניית המחסומים הבאה: עבור N טבעי כלשהו, ניקח לוח $3N\times 3N$ החסום על ידי מסגרת של מחסומים בעלת $12N+4$ מחסומים. בלוח הפנימי נציב מחסומים בכל המשבצות שסכום הקואורדינטות שלהן הינו בעל שארית $1$ לאחר חלוקה ב-3 (הקואורדינטות הן מספר העמודה בספירה משמאל ומספר השורה בספירה מלמטה).

מדובר ב-$3N^2$ מחסומים נוספים. במעטפת של הלוח נמצאים מספר מחסומים, ועל מנת להשלים את בניית הדוגמה נסיר חצי מהמחסומים במעטפת, כאשר מסירים מחסומים לסירוגין. נציב את הצריח בפינה הימנית עליונה של הלוח ואת המשבצת הכחולה בפינה השמאלית תחתונה.



בכל צעד של הצריח הוא נוחת על משבצת. כל משבצת שעליה הוא נוחת במהלך מסלולו נצבע בצהוב ונתאים לה את המחסום הימני ביותר שנמצא משמאלה באותה השורה .

ניתן לראות כי מחסומים שמשויכות אליהם פחות משתי משבצות צהובות חייבים להיות ב-3 השכבות החיצוניות של הלוח.

לכן, קיים מספר קבוע $C$ כך שכמות הצעדים הנדרשת היא לפחות $6N^2-CN$, כאשר יש לכל היותר $3N^2+CN$ מחסומים. לכן, עבור בחירת ערכו של $N$ להיות גדול מספיק, נקבל שהצריח חייב לנוע יותר מ-$1.99n+100$ צעדים על מנת לנחות על המשבצת הכחולה, כאשר $n$ היא כמות המחסומים בדוגמה.

(ב) לכל $n$, ולכל בחירת מיקומיהם של $n$ המחסומים, אם קיים מסלול של הצריח שבסופו הוא מגיע למשבצת הכחולה, אז קיים מסלול כזה ובו $2n-2\sqrt{3n}+100$ מהלכים לכל היותר.

נסתכל על מסלול בעל כמות הצעדים המינימלית האפשרית של הצריח שבסופו הוא נוחת על המשבצת הכחולה.

נקרא למשבצת *קיצונית* אם ניתן לצעוד ממנה עם הצריח מרחק ארוך כרצוננו בתוך צעד אחד בלי לעבור או לנחות על מחסום.

כמו קודם, נצבע כל משבצת שהצריח נוחת עליה בצהוב, ונשייך לכל משבצת צהובה שאינה קיצונית את המחסום הימני ביותר שנמצא משמאלה בשורה (בהכרח קיים כזה). נקרא לשתי משבצות קרובות, אם ניתן לעבור מאחת לשנייה על ידי מהלך חוקי של הצריח.

אם שתי משבצות צהובות הן קרובות, אז במסלול המינימלי עליו אנחנו מסתכלים, הצריח היה חייב לנוע מאחת מהן לשנייה ישירות (אחרת, הוא היה יכול להקטין את כמות המהלכים במסלול על ידי מסע ישיר בין המשבצת הצהובה הראשונה לשנייה).

**טענה:** בין כל שתי משבצות קיצוניות קיים מסלול חוקי של הצריח בן 7 מהלכים לכל היותר
**הוכחה:** נבחר שורה עליונה יותר מכל המחסומים. ממשבצת קיצונית, תוך צעד אחד מאוד רחוק ואז תוך שני צעדים נוספים (לכל היותר) ניתן להגיע לשורה הנבחרת. מהלך נוסף מתבצע כדי להגיע ממשבצת בשורה הנבחרת למשבצת אחרת באותה השורה. שיטה זו מבטיחה מסלול באורך לכל היותר 3+3+1=7 מהלכים.

לכן, ישנן לכל היותר 8 משבצות צהובות קיצוניות (אחרת, ניתן היה לעבור על ידי 7 מהלכים מהראשונה מביניהן לאחרונה מביניהן, ובכך לקצר את המסלול המינימלי של הצריח).

עבור מחסום מסוים, לא ייתכן שמשויכות אליו יותר משתי משבצות צהובות, כיוון שכל שתי משבצות צהובות שמשויכות לאותו המחסום הן באותה השורה ובלי מחסום ביניהן, ולכן קרובות אחת לשנייה.

לכן, לכל מחסום משויכות שתי משבצות צהובות לכל היותר, ולמחסום שהוא הימני ביותר בשורה שלו אין משבצות צהובות משויכות כלל, כיוון שאיננו משייכים משבצות צהובות קיצוניות.

נסמן ב- $K$ את מספר המשבצות הצהובות שאינן קיצוניות (שהוא קטן בלכל היותר 8 ממספר המהלכים), ב- $R$ את מספר השורות השונות בהן יש מחסום, וב- $C$ את מספר העמודות השונות בהן יש מחסום.
מתקיים $K \le 2(n-R)$, כיוון שלכל משבצת צהובה שאינה קיצונית משויך מחסום, ולכל מחסום קיימות לכל היותר 2 משבצות צהובות שמשויכות אליו, ול- $R$ מהמחסומים (הימניים ביותר בשורה שלהם) אין משבצות צהובות משויכות כלל. באופן סימטרי מתקיים $K \le 2(n-C)$.

נסתכל על קבוצת המשבצות שיש בשורה שלהן מחסום ובעמודה שלהן מחסום. בקבוצה זו יש $R \cdot C$ משבצות. מצד שני, כל המחסומים וכל $K$ המשבצות הצהובות שאינן קיצוניות נמצאות בקבוצה זו. לכן

$$K + n \le R \cdot C \le \max(R,C)^2 \le \left(n - \frac{K}{2}\right)^2$$

לכן

$$\left(K - (2n+2)\right)^2 \ge 12n + 4 > 12n$$

בגלל שידוע ש- $K > 2n+2$, נסיק ש:

$$K < 2n + 2 - \sqrt{12n}$$

ולכן כמות הצעדים במסלולו של הצריח היא לכל היותר $2n - 2\sqrt{3n} + 11$, מה שמסיים את הוכחת השאלה.