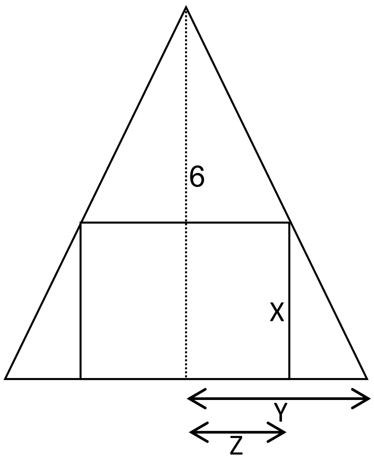
פתרונות לתחרות גיליס תשע"ו

1. אילולא היו עוצרים לאכול עוגיות לנינה היה לוקח שעה אחת בדיוק (60 דקות) לעשות את הדרך לבית של סבתא, ולמאיר שלושת רבעי השעה (45 דקות). זאת אומרת נוסף על זמן אכילת העוגיות נינה בילתה 60 דקות בהליכה ומאיר 45 דקות. נסמן ב-N את מספר הספסלים בדרך, וב-M את מספר הדקות שלוקח לנינה לאכול עוגייה. לפי הנתון למאיר לוקח 2M דקות לאכול עוגייה. בסך הכל נינה בילתה MN דקות באכילת עוגיות, ומאיר 2MN דקות. משום שהם הגיעו יחד לבית של סבתא מתקיים: $2MN + 45 = MN + 60$, ולאחר העברת אגפים נקבל $MN = 15$. משום שנתון שמספר הדקות שלוקח לנינה לאכול עוגייה הוא מספר שלם, כל האופציות הן $M \in \{1,3,5,15\}$ ובהתאמה **מספר הספסלים האפשרי הוא חמישה-עשר, חמישה, שלושה או אחד.**

2. נסמן את אורך צלע הקובייה ב-X. נחתוך את הקובייה והחרוט עם מישור מאונך לבסיס החרוט, העובר דרך ארבעה קדקודים של הקובייה שאינם באותה פאה (זאת אומרת מישור מאונך לבסיס החרוט העובר דרך ארבעה קדקודים ו"חותך" את הקובייה לשניים). נתבונן בתמונה שתתקבל:



קיבלנו משולש שווה שוקיים ובתוכו מלבן. גובה המשולש (שהוא גובה החרוט) הוא 6. אורך בסיס המשולש (שהוא פעמיים רדיוס בסיס החרוט) הוא $2\sqrt{2}$. גובה המלבן (שהוא אורך צלע הקובייה) הוא X. רוחב המלבן הוא אורך אלכסון פאת הקובייה והוא $\sqrt{2}X$. לכן Y בתמונה (שהוא מחצית בסיס המשולש) שווה $\sqrt{2}$ (זהו בעצם רדיוס החרוט), ו-Z בתמונה (שהוא מחצית רוחב המלבן) שווה $\frac{\sqrt{2}X}{2}$. כעת מדמיון משולשים ברור $\frac{\mathrm{X}}{6} = \frac{\mathrm{Y-Z}}{\mathrm{Y}}$, ולאחר הצבה נקבל $\frac{\mathrm{X}}{6} = \frac{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}X}{2}}{\sqrt{2}}$, ולבסוף $\mathrm{X} = \frac{3}{2}$, זאת אומרת **אורך צלע הקובייה הוא $\frac{3}{2}$**.

3. ניקח מספר טבעי N. אם הייצוג העשרוני שלו הוא $\mathrm{N} = \sum_{\mathrm{i}=0}^{n} a_i 10^i$ אז $S(\mathrm{N}) = \sum_{\mathrm{i}=0}^{n} a_i$. לכן, אם N אינו חד ספרתי מתקיים בהכרח $S(N) < N$. אם נסכום שוב ושוב את הספרות אז כל עוד לא נגיע למספר חד ספרתי נקבל סדרת מספרים יורדת ממש:

$$N > S(N) > \mathrm{S}(\mathrm{S}(\mathrm{N})) > \mathrm{S}\left(\mathrm{S}(\mathrm{S}(\mathrm{N}))\right) > \ldots$$

משום שזו סדרת מספרים חיוביים שלמים <u>אחרי מספר סופי של צעדים נקבל מספר חד</u>

ספרתי (לכל היותר N-10 צעדים כי בכל שלב אנחנו יורדים לפחות באחת) – זאת אומרת **הוכחנו שלכל מספר יש עומק**.

נסמן ב-$x(n)$ את המספר הקטן ביותר בעל עומק n. את המספרים הראשונים קל לחשב ולראות שמתקיים $x(2) = 10, x(3) = 19, x(4) = 199$. נסמן לכל $n \geq 3$:
$z(n) = 2 \cdot 10^{y(n)} - 1$, כאשר $y(3) = 1$, ולכל $n > 3$: $y(n+1) = \frac{2\cdot(10^{y(n)}-1)}{9}$.
נוכיח באינדוקציה כי לכל $n \geq 3$ מתקיים $x(n) = z(n)$.

בסיס האינדוקציה הוא $n = 3$, ואכן מתקיים $x(3) = 19 = z(3)$. כעת נניח כי השיוויון $x(i) = z(i)$ נכון לכל מספר $i = 3,4,5,6,\dots,n$ ונוכיח כי הוא נכון גם ל-$n+1$:

נבחין כי המספר $z(n+1)$ מורכב מהספרה השמאלית ביותר 1, ולצידה $y(n+1)$ תשיעיות. לכן:
$$S(z(n+1)) = 1 + 9 \cdot y(n+1) = 2 \cdot \left(10^{y(n)} - 1\right) + 1 = 2 \cdot 10^{y(n)} - 1 = z(n)$$
לפי הנחת האינדוקציה ל-$z(n)$ יש עומק n, ולכן ל-$z(n+1)$ יש עומק $n+1$.

כעת נותר להראות שאכן $z(n+1)$ הוא המספר הקטן ביותר בעל עומק $n+1$. ניקח מספר כלשהו $Z < z(n+1)$. יש שתי אפשרויות: או של-Z יש לכל היותר $y(n+1)$ ספרות, או שיש לו $y(n+1)+1$ ספרות, כך שהספרה הראשונה (השמאלית ביותר) היא 1, ולפחות אחת מהספרות האחרות קטנה מתשע. בשתי האפשרויות מתקיים:
$$S(Z) \leq 9 \cdot y(n+1) = 2 \cdot \left(10^{y(n)} - 1\right) = \left(2 \cdot 10^{y(n)} - 1\right) - 1 = z(n) - 1$$
מהנחת האינדוקציה ל-$z(n) - 1$ יש עומק קטן מ-n, ולכן ל-Z יש עומק קטן מ-$n+1$.

בכך סיימנו והוכחנו כי לכל $n \geq 3$ מתקיים $x(n) = z(n) = 2 \cdot 10^{y(n)} - 1$, כאשר $y(3) = 1$, ולכל $n > 3$: $y(n+1) = \frac{2\cdot(10^{y(n)}-1)}{9}$.

קיבלנו, אם כך, ש-$x(n)$ מורכב מהספרה השמאלית ביותר 1, ולצידה $y(n)$ תשיעיות. לכן <u>$x(n)$ קונגרואנטי ל-1 מודולו 9</u> (זאת אומרת השארית של $x(n)$ בחלוקה ב-9 היא 1). כמו כן מהנוסחה שהוכחנו $x(n) = 2 \cdot 10^{y(n)} - 1$ קל לראות ש-$x(n)+1$ מתחלק ב-2^k, לכל $k \leq y(n)+1$, זאת אומרת $x(n)$ קונגרואנטי ל-(-1) מודולו 2^k לכל $k \leq y(n)+1$ (זאת אומרת השארית של $x(n)$ בחלוקה ב-2^k היא (-1) לכל $k \leq y(n)+1$). משום ש-$y(3) = 1, y(4) = 2, y(5) = 22$ אז <u>לכל $n \geq 5$ מתקיים ש-$x(n)$ קונגרואנטי ל-(-1) מודולו $2^5 = 32$</u>.

בפרט, משום ש-$x(n)$ קונגרואנטי ל-1 מודולו 9 אזי הוא גם קונגרואנטי ל-1 מודולו 3. לכן השארית של $x(5776)$ בחלוקה ב-3 היא 1. ראינו גם ש-$x(5776)$ הוא מספר אי-זוגי (ספרת האחדות שלו היא 9), זאת אומרת משאיר שארית 1 בחלוקה ב-2. לכן נסיק **שהשארית של $x(5776)$ בחלוקה ב-6 היא 1** (אפשר לראות שזו השארית היחידה שתיתכן ללא שנקבל סתירה להיות המספר אי-זוגי ושששאריתו בחלוקה ב-3 היא 1, או להשתמש במשפט השאריות הסיני).

כעת נרצה לחשב את השארית של $x(n)$ בחלוקה בשבע. משום ש-10 קונגרואנטי ל-3 מודולו 7, 10^2 קונגרואנטי ל- 2 מודולו שבע וכך הלאה, קל לחשב ולראות של-10^k מודולו 7 מחזור 6 (זאת אומרת 10^n קונגרואנטי ל-10^m מודולו 7 אם $n-m$ מתחלק ב-6). לכן, די לחשב את $y(n)$ מודולו 6. נבחין כי לכל $n \geq 3$ המספר $y(n+1)$ מורכב מ-$y(n)$ פעמים

הספרה 2. לכן לכל $n \geq 4$ המספר $y(n)$ הוא זוגי, וכמו כן מתקיים $S\big(y(n+1)\big) = 2y(n)$. לכן נסיק כי $y(n+1) + y(n)$ מתחלק ב-3. בפרט נקבל כי אם ניקח שני מספרים שלמים $m,n > 4$ כך ש- $m-n$ הוא מספר זוגי, אז $y(n) - y(m)$ מתחלק ב-6: שני האיברים בהפרש מתחלקים ב-2 וכן ההפרש מתחלק ב-3 משום ש:
$y(n+2) - y(n) = \big(y(n+2) + y(n+1)\big) - \big(y(n+1) + y(n)\big)$ וכך הלאה. לבסוף מספר שמתחלק ב-2 וב-3 חייב להתחלק ב-6 משום ש-2 ו-3 זרים (אפשר להשתמש שוב במשפט השאריות הסיני או לראות שבחלוקה ב-6 אפס היא השארית היחידה שלא תיתן סתירה). מכאן נסיק ש-<u>$x(n) - x(m)$ מתחלק ב-7 לכל שני מספרים שלמים $m,n > 4$ כך ש- $m-n$ הוא מספר זוגי.</u>

כעת נרצה לחשב את השארית של $x(5708) - x(5776)$ בחלוקה ב-2016. הוכחנו כבר שגם $x(5776)$ וגם $x(5708)$ קונגרואנטים ל-1 מודולו 9 וקונגרואנטים ל-(-1) מודולו 32. לכן ההפרש $x(5708) - x(5776)$ מתחלק ב-9 ללא שארית ומתחלק ב-32 ללא שארית. כמו כן ראינו שההפרש מתחלק ב-7 ללא שארית (כי 5776-5708=68 וזהו מספר זוגי). משום ש-$2016 = 32 \cdot 9 \cdot 7 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$, וכן $2^5, 3^2, 7$ זרים בזוגות, חייב להתקיים שההפרש **$x(5708) - x(5776)$ מתחלק גם ב-2016, זאת אומרת השארית היא אפס** (שוב, אפשר לראות זאת למשל ממשפט השאריות הסיני).

4. על המעגל נמצאים 3 נקודות צבעוניות: אדומה, ירוקה וכחולה, בסדר זה נגד כיוון השעון. מותר להוסיף נקודה אדומה, ירוקה או כחולה, לפי הכלל הבא: אם מוסיפים נקודה X בקשת ריקה שנמצאת בין נקודות צבעוניות A ו-B, אז מותר לצבוע X בכל צבע כך שבנקודות A, B, X יהיו שני צבעים לכל היותר. מותר לעשות גם פעולה הפוכה: כאשר נקודות A, B, C נמצאות על המעגל בסדר זה, לא כולם בצבעים שונים, ואין בינם נקודות צבעוניות חדשות, מותר למחוק את הנקודה B. האם לאחר מספר הוספות ומחיקות ניתן להגיע למצב שעל המעגל יש שוב 3 נקודות בלבד, אדומה, ירוקה וכחולה, אבל עם כיוון בשעון בסדר זה?

<u>**תשובה**</u>. לא.

<u>**פתרון ראשון**</u>. נעבור מסביב למעגל נגד כיוון השעון. על כל קשת שמתחילה בכחול ונגמרת בירוק, או מתחילה בירוק ונגמרת באדום, או מתחילה באדום ונגמרת בכחול נכתוב 1, ועל כל קשת בכיוון ההפוך – מאדום לירוק, מירוק לכחול, ומכחול לאדום נכתוב -1. על קשתות עם צבעים באותו צבע לא נכתוב כלום.

סכום המספרים במצב ההתחלתי הוא -3 , וסכום המספרים במצב שרוצים להגיע אליו הוא 3.

מצד שני, במהלך המשחק סכום המספרים לא משתנה. אם נוסיף בין שתי נקודות באותו צבע נקודה בצבע אחר, אז מוסיפים 1 ו--1. אם נוסיף נקודה צבעונית בקשת שאחת הנקודות היא באותו צבע, המספרים נשארים אותם מספרים. אסור להוסיף נקודה באף מצב אחר, וכן גם כאשר נעשה פעולה הפוכה של הורדת נקודה כלום לא משתנה.

<u>**פתרון שני**</u>. נתאים לכל קדקוד וקטור: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ לכל קדקוד אדום, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ לכל קדקוד ירוק, $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ לכל קדקוד כחול. נעבור על המעגל נגד כיוון השעון, ולכל זוג קדקודים רצופים נחשב את המכפלה הוקטורית של הוקטורים המתאימים, ונחבר את כל המכפלות הוקטוריות. קל

לראות שבמהלך המשחק הסכום ישמר. במצב ההתחלתי הערך המחושב הוא $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, ובמצב

הרצוי $\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$, לכן לא נצליח לעבור ממצב אחד למצב אחר.

הערה. קיים גם פתרון טופולוגי: נצייר בצד משולש שהקדקודים שלו בצבעים אדום, ירוק וכחול. כל מעגל עם נקודות צבעוניות עליו מגדיר טיול מסביב למשולש. מסתבר שמספר הליפוף נשמר לאורך המשחק, אבל הוא שונה במצב המקורי ובמצב הרצוי, כי הם מתאימים למעבר מסביב למשולש בכיוונים הפוכים.

5. סדרת פיבונאצ'י מוגדרת לפי $F_1 = F_2 = 1$ ונוסחת הנסיגה $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ לכל $n \geq 3$ שלם. נתונים $m, n \geq 1$ טבעיים. מצאו את המעלה המינימלית d כך שקיים פולינום

$$f(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

המקיים $f(k) = F_{m+k}$ לכל $k = 0,1,\dots,n$.

<u>תשובה</u>. אם $m \neq n$ אז $d = n$, ואם $m = n$ אז $d = n - 1$. בניסוח שקול $d = n - \delta_{m,n}$ באשר $\delta_{m,n} = 1$ אם ורק אם $m = n$, ואחרת $\delta_{m,n} = 0$.

<u>פתרון</u>.

ראשית נכליל את הטענה: נרחיב את ההגדרה של סדרת פיבונאצ'י גם לאינדקס אפס ולשלמים שליליים, על ידי נוסחת הנסיגה ההפוכה $F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$ לכל $n \leq 0$. הסדרה תראה כך:

n	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
F_n	13	-8	5	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	5	8	13

קל לראות שהסדרה המתקבלת מקיימת $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ לכל n שלם, וכן מתקיים $F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$ לכל n. בפרט $F_n \neq 0$ לכל $n \neq 0$. אנו טוענים כעת שתשובתנו לגבי המעלה תקפה גם לכל m שלם (לא רק החל מ-1), ונוכיח זאת באינדוקציה על n.

בסיס אינדוקציה, $n = 1$: אכן, לכל m קיים ויחיד פולינום לינארי המקיים $f(0) = F_m$, $f(1) = F_{m+1}$, והוא הפולינום $f(x) = F_{m-1} x + F_m$. מכיוון ש-$F_{m-1} = 0$ אם ורק אם $m = 1$, אנו רואים כי זהו פולינום ממעלה 1 אם $m \neq n = 1$, ופולינום ממעלה 0 (הקבוע 1) אם $m = n = 1$. מכיוון שזהו הפולינום הלינארי היחיד המקיים את התנאים, כל פולינום חוקי אחר יהיה ממעלה גבוהה יותר, כפי שטענו.

צעד אינדוקציה: יהא $n \geq 2$. יש להוכיח שתי טענות: שקיים פולינום כנדרש ממעלה $n - \delta_{m,n}$, ושלא קיים פולינום ממעלה קטנה יותר. ובכן, יהי $f(x)$ פולינום ממעלה d המקיים את התנאי. כמובן ש-$d > 0$ (אחרת הפולינום היה קבוע, אך אין אף שלושה מספרים עוקבים

שווים בסדרת פיבונאצ'י). נגדיר פולינום חדש $\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$, המכונה "הנגזרת הדיסקרטית של f". נשים לב שאם f הוא ממעלה $d>0$, אז Δf הוא ממעלה בדיוק $d-1$. זאת משום שלכל מונום x^k מתקיים ש-$\Delta(x^k)$ הוא פולינום ממעלה בדיוק $k-1$ (בדיקת הפרטים מושארת לקורא). בנוסף, נשים לב שמתקיים

$$\Delta f(k)=f(k+1)-f(k)=F_{m+k+1}-F_{m+k}=F_{m-1+k}$$

לכל $k=0,\dots,n-1$, כלומר, Δf עונה על תנאי השאלה עבור הזוג $m-1,n-1$. לכן על פי הנחת האינדוקציה, מתקיים $d-1\geq(n-1)-\delta_{m-1,n-1}=n-\delta_{m,n}-1$, ולכן $d\geq n-\delta_{m,n}$, כפי שרצינו להוכיח.

בצורה דומה גם נוכל לבנות פולינום כזה מהמעלה הנכונה: מהנחת האינדוקציה קיים פולינום g ממעלה $d-1=n-1-\delta_{m,n}$ המקיים $g(k)=F_{m-1+k}$ לכל $k=0,\dots,n-1$. אם נצליח למצוא פולינום f ממעלה d המקיים $\Delta f=g$, $f(0)=F_m$, אזי הוא יקיים $f(k)=F_{m+k}$ לכל $k=0,\dots,n$, ויוכיח את הנדרש. ואכן, מובטח לנו קיום פולינום כזה על סמך הטענה הבאה:

<u>טענת עזר</u> יהא g פולינום כלשהו (שאינו פולינום האפס) ממעלה d, ויהא a מספר כלשהו. אזי קיים פולינום f ממעלה $d+1$ עם $f(0)=a$ ו- $\Delta f=g$.

נוכיח את הטענה באינדוקציה על מעלת g: עבור $d=0$, g הוא פולינום קבוע לא אפס; נגדיר $f(x)=gx+a$, אשר מקיים את כל הנדרש והוא ממעלה 1. יהא $d>0$, ונניח כי הטענה נכונה לכל פולינום ממעלה קטנה מ-d. יהא a_dx^d המקדם המוביל של הפולינום g. נשים לב כי הפולינום $g-\Delta\left(\frac{a_d}{d+1}x^{d+1}\right)$ הוא ממעלה קטנה מ-d, ולכן על פי הנחת האינדוקציה קיים f_0 ממעלה קטנה מ- $d+1$ המקיים $\Delta(f_0)=g-\Delta\left(\frac{a_d}{d+1}x^{d+1}\right)$ ו- $f_0(0)=a$. לכן $f=f_0+\frac{a_d}{d+1}x^{d+1}$ הוא ממעלה $d+1$ וגם מקיים $f(0)=a$ וכן $\Delta f=g$, כנדרש.

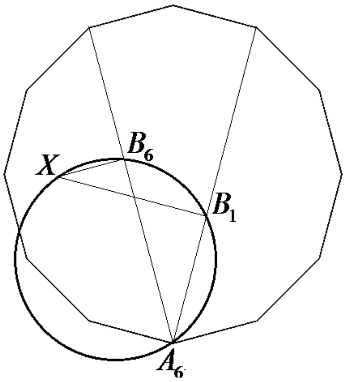
6. במישור נתונים מצולע משוכלל $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}A_{11}A_{12}$, ונקודה X. יהיו $B_1,B_2,B_3,B_4,B_5,B_6,B_7,B_8,B_9,B_{10},B_{11},B_{12}$ עקבי האנכים מנקודה X לישרים $A_1A_6, A_2A_7, A_3A_8, A_4A_9, A_5A_{10}, A_6A_{11}, A_7A_{12}, A_8A_1, A_9A_2, A_{10}A_3, A_{11}A_4, A_{12}A_5$ בהתאמה. מצאו את הערך של

$$\frac{XA_1+XA_2+XA_3+\ldots+XA_{11}+XA_{12}}{B_1B_6+B_2B_7+\ldots+B_7B_{12}+B_8B_1+\ldots+B_{12}B_5}.$$

<u>תשובה</u>. 2.

<u>פתרון</u>. הזווית $\angle A_1A_6A_{11}$ היא זוויות היקפית במעגל החוסם של המצולע הנתון, והיא נשענת על קשת שהיא שישית מהמעגל השלם. לכן $\measuredangle A_1A_6A_{11}=30°$. הנקודות B_1 ו- B_6 נמצאות על הישרים A_1A_6 ו- A_6A_{11}, ולכן הזווית $\measuredangle B_1A_6B_6$ היא 30° או $180^\circ-30^\circ$, תלוי באיזה צד של A_6 נמצאות הנקודות.

נתבונן במעגל שקוטרו XA_6. הוא עובר דרך הנקודות B_1 ו-B_6, מכיוון שהזוויות $\angle XB_1A_6, \angle XB_6A_6$ ישרות. הקשת B_1B_6 היא שישית מהמעגל, כי נשענת עליה זווית של 30° מאחד הצדדים, לכן המיתר B_1B_6 שווה לרדיוס המעגל, כלומר מחצית מקוטר המעגל XA_6. כלומר $XA_6 = 2B_1B_6$. באופן דומה



$$XA_7 = 2B_2B_7$$
$$\cdots$$
$$XA_{12} = 2B_7B_{12}$$
$$XA_1 = 2B_6B_1$$
$$\cdots$$
$$XA_5 = 2B_{12}B_5$$

נחבר את 12 המשוואות האלה, נקבל באגף שמאל סכום של XA_i כלומר המונה של השבר בניסוח השאלה, ובאגף ימין פעמיים סכום של 12 אלכסונים, כלומר המכנה של השבר מניסוח השאלה. מכאן שהמנה היא 2.

7. מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$, המקימות

$$f\left(x(2y+1)\right) = f\left(x(y+1)\right) + f(x)\,f(y)$$

לכל שני מספרים שלמים x, y.

<u>**תשובה**</u>. קיימות 7 פונקציות שמקיימות את המשואה:

$$f_0(x) \equiv 0 \ ,$$

$$f_1(x) = x \ ,$$

$$f_2(x) = |x| \ ,$$

$$f_3(x) = \frac{(-1)^x + 1}{2} = \begin{cases} 0 & x = 2k \\ 1 & x = 2k+1 \end{cases} \ ,$$

$$f_4(x) = \frac{(-1)^x + 1}{2} \cdot \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 0 & x = 2k \\ \operatorname{sgn}(x) & x = 2k+1 \end{cases} \ ,$$

$$f_5(x) = \begin{cases} 0 & x = 3k \\ 1 & x = 3k+1 \\ -1 & x = 3k-1 \end{cases} \ ,$$

$$f_6(x) = \begin{cases} 0 & x = 3k \\ 1 & |x| = 3k+1 \\ -1 & |x| = 3k-1 \end{cases} \ .$$

פתרון. נסמן את התנאי הנתון

$$(\#) \qquad f\left(x(2y+1)\right) = f\left(x(y+1)\right) + f(x)f(y).$$

נציב $(0,0)$ נקבל:

$$f(0) = f(0) + \left(f(0)\right)^2$$

$$0 = \left(f(0)\right)^2$$

ולכן $f(0)=0$.

אם נציב $y=-1$ ב-$(\#)$ נקבל

$$f(-x) = f(0) + f(x)f(-1)$$

$$(*) \qquad f(-x) = f(x)f(-1)$$

אם נציב $-x$ במקום x במשוואה האחרונה נקבל

$$f(x) = f(-x)\cdot f(-1) = f(x)\cdot\left(f(-1)\right)^2$$

אז או ש-$f(x)=0$ או $\left(f(-1)\right)^2=1$.

נשים לב שאם $f(x)=0$ לכל x , אז הדרישה המקורית מתקיימת.

מרגע זה, ננסה לבדוק את האפשרות השנייה: קיים x עבורו $f(x)\neq 0$.

זאת אומרת ש-$f(-1)=\pm 1$, כלומר לפי $(*)$ הפונקציה f בהכרח זוגית או אי-זוגית.

בכל מקרה, $f(1) = f(-1)\cdot f(-1) = 1$.

כעת נציב $y=-z-1$ ב-$(\#)$

$$f\left(-x(2z+1)\right) = f(-xz) + f(x)f(-z-1)$$

מכיוון ש-f פונקציה זוגית או אי-זוגית, נקבל

$$f\left(x(2z+1)\right) = f(xz) + f(x)f(z+1)$$

אבל אם $y=z$ נציב ב-$(\#)$

$$f\left(x(2z+1)\right) = f\left(x(z+1)\right) + f(x)f(z)$$

נשווה את שתי הזהויות האחרונות ונקבל:

$$f\left(xz\right)+f\left(x\right)f\left(z+1\right)=f\left(x\left(z+1\right)\right)+f\left(x\right)f\left(z\right)$$

$$f\left(xz\right)-f\left(x\right)f\left(z\right)=f\left(x\left(z+1\right)\right)-f\left(x\right)f\left(z+1\right)$$

כלומר $f\left(xz\right)-f\left(x\right)f\left(z\right)=0$ אם ורק אם $f\left(x\left(z+1\right)\right)-f\left(x\right)f\left(z+1\right)=0$.

אבל זה מתקיים עבור $z=0$, ולכן זה נכון לכל z שלם באינדוקציה (אינדוקציה רגילה עבור z חיובי, ואינדוקציה הפוכה עבור z שלילי). לכן

$$f\left(xz\right)=f\left(x\right)f\left(z\right) \qquad (**)$$

לכל x,z . לכן אפשר לשכתב את $\left(\#\right)$ בצורה

$$f\left(x\right)f\left(2y+1\right)=f\left(x\right)f\left(y+1\right)+f\left(x\right)f\left(y\right)$$

מכיוון שהנחנו כי עבור x מסוים $f\left(x\right)\neq 0$, התנאי שקול ל-

$$f\left(2y+1\right)=f\left(y+1\right)+f\left(y\right). \qquad (***)$$

נסמן $f\left(2\right)=a$. נוכל לחשב ערכים של $f\left(x\right)$ עבור $1\leq x\leq 8$ באמצעות a , בעזרת $\left(**\right)$ ו-$\left(***\right)$. למשל אם נציב $y=1$ ב-$\left(***\right)$ נקבל $f\left(3\right)=f\left(2\right)+f\left(1\right)$, ובצורה דומה נוכל לחשב ערך של $f\left(x\right)$ לכל x אי-זוגי חיובי, אם חישבנו את הערכים הקודמים. אם נציב $y=2$ ב-$\left(**\right)$ והצבה קבל $f\left(2x\right)=f\left(2\right)f\left(x\right)=a\cdot f\left(x\right)$ ונוכל לחשב $f\left(x\right)$ לכל x זוגי. נרשום את התוצאות בטבלה:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f\left(x\right)$	1	a	$1+a$	a^2	$1+2a$	$a+a^2$	$1+a+a^2$	a^3

כעת נוכל לחשב את $f\left(15\right)$ בשתי דרכים:

$$\left(1+a\right)\left(1+2a\right)=f\left(3\right)f\left(5\right)=f\left(15\right)=f\left(7\right)+f\left(8\right)=1+a+a^2+a^3.$$

לכן $\left(1+a\right)\left(1+2a\right)=\left(1+a\right)\left(1+a^2\right)$.

כלומר מתקיים $1+a=0$ או $1+2a=1+a^2$. לכן a הוא -1, 0 או 2.

מכיוון שכל הערכים החיוביים מוגדרים a בצורה חד-משמעית, ולאחר מכן הערכים בנקודות שליליות מוגדרת באמצעות $f\left(-1\right)$, זה משאיר רק 6 פונקציות אפשריות מלבד $f\equiv 0$.
נשאר לבדוק איזה מבין האפשרויות הללו עובדות. מסתבר שכולן עובדות, ולכן יש 7 תשובות אפשריות.

ראינו כי מספיק שיתקיימו התנאים $(**)$ ו-$(***)$. הבחירה של ± 1 עבור $f(-1)$ לא משפיעה על התנאי $(***)$, מכיוון שהמספרים $y, y+1, 2y+1$ הם מאותו סימן, כלומר מספיק לבדוק שהפונקציה מקיימת את התנאים למספרים חיוביים. ברור שהפונקציה $f(x)=x$ מתאימה. זה מתאים ל-$a=2$, וכך נוצרות שתי פונקציות על $\mathbf{Z}$:

$$f(x)=x \text{ ו- } f(x)=|x| .$$

אם $a=0$ אז $f(2x)=f(2)f(x)=0$ לכל x, ואז

$$f(2x+1)=f(x)+f(x+1)$$

שזה $0+1$ בסדר כלשהו. מקבלים פונקציה שהיא 0 לכל x זוגי ו-1 לכל x אי-זוגי חיובי, ושוב אפשר להרחיב את הפונקציה למספרים שליליים בשתי דרכים.

כאשר $a=-1$, כאשר מחשבים מספר ערכים ראשונים רואים תבנית ברורה: $f(x)$ הוא תמיד 0, 1 או -1, כך ש-$f(x)=x(\mathrm{mod}3)$ לכל x חיובי. קל לראות שפונקציה זו מקיימת $(***)$: סכום של שני מספרים שונים מבין 0, 1 ו--1, זה שוב מספר מאותו סוג, ויש את הערכים הנכונים מודולו 3. בדומה, $(**)$ מתקיים כי מכפלה של שני מספרים כלשהם מבין 0, 1 ו--1 זה מספר מאותו סוג, והערך נכון מודולו 3. ושוב, יש בדיוק שתי דרכים להמשיך את הפונקציה לערכים שליליים.