

14.12.2022

האולימפיאדה הארצית ע"ש פרופ' גיליס ה'תשפ"ג

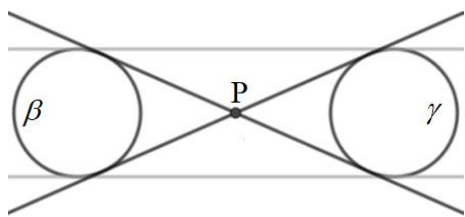
הערות כלליות:

השאלון הוא בן שבע שאלות.
משך הזמן לכתיבת הפתרונות הוא חמש שעות.
יש להוכיח כל טענה ולנמק כל תשובה באופן מלא.
אין להשתמש במחשבון.

1. סביב שולחן עגול ישובים 2000 אנשים. כל אחד מהם הוא או דובר אמת (שתמיד אומר את האמת) או שקרן (שתמיד משקר). כל אחד מהאנשים הכריז: "לפחות שניים משלושת האנשים הסמוכים אליי מימיני הם שקרנים". כמה דוברי אמת יש במעגל?

2. המספרים השלמים האי-שליליים x, y מקיימים $\sqrt{x} + \sqrt{x+60} = \sqrt{y}$. מהו הערך הגדול ביותר האפשרי של x ?

3. נתון משולש ABC ומעגל כלשהו ω . נסמן ב- α את השיקוף של ω ביחס ל-A, נסמן ב- β את השיקוף של ω ביחס ל-B, ונסמן ב- γ את השיקוף של ω ביחס ל-C. נתון בנוסף שהמעגלים α, β, γ לא נחתכים כלל זה עם זה.

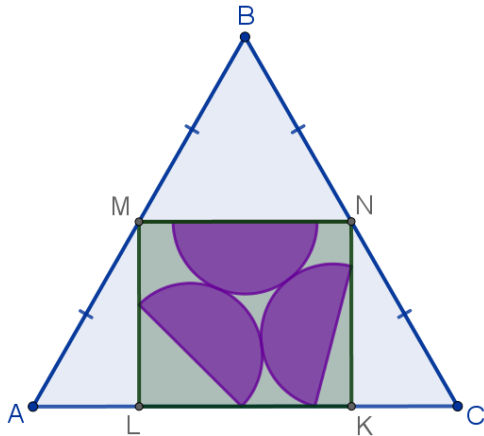


נסמן ב-P את נקודת מפגש המשיקים המשותפים הפנימיים של β ו- γ (ראו ציור). בדומה, נסמן ב-Q את נקודת מפגש המשיקים המשותפים הפנימיים של α ו- γ , ונסמן ב-R את נקודת מפגש המשיקים המשותפים הפנימיים של α ו- β . הוכיחו כי המשולשים ABC ו-PQR חופפים זה לזה.

4. עבור כל n שלם חיובי, מצאו את כל השלשות a, b, c של מספרים ממשיים כך שמתקיים:

$$\begin{cases} a = b^n + c^n \\ b = c^n + a^n \\ c = a^n + b^n \end{cases}$$

יש עמוד נוסף!



5. נתון משולש משוכלל ABC שכל צלעותיו הן באורך 1. אמצעי הצלעות AB ו- BC הם M ו- N . הנקודות L ו- K נבחרו על AC כך ש- $KLMN$ הוא מלבן. בתוך מלבן זה נמצאים שלושה חצאי עיגולים בעלי אותו הרדיוס, באופן שמתואר בציור (קצותיהם נמצאים על צלעות המלבן, הקשתות משיקות זו לזו). מהו הערך הקטן ביותר האפשרי עבור הרדיוס של חצאי העיגולים?

6. קבעו האם קיימת קבוצה S של 5783 מספרים ממשיים שונים בעלת התכונה הבאה: לכל a, b ב- S (לא בהכרח שונים זה מזה) קיימים $c \neq d$ ב- S כך ש- $a \cdot b = c + d$.

7. איילה וברווז משחקים משחק. בתחילת המשחק, איילה בוחרת מספר שלם סודי A בין אחד למיליון. בכל תור של המשחק לאחר מכן, ברווז יכול לבחור מספר שלם B , ואיילה תגלה לו את הספרה השכיחה ביותר בייצוג העשרוני של המכפלה $A \cdot B$. במקרה שיש כמה ספרות שכולן הכי שכיחות, איילה תגלה לו את כולן. לדוגמא, אם $A \cdot B$ שווה 2022, איילה תגלה לברווז שהספרה 2 היא הכי שכיחה, ואם $A \cdot B$ שווה 5783783, איילה תגלה לברווז שהספרות 3, 7 ו-8 הן הכי שכיחות. מטרתו של ברווז היא לגלות בוודאות את המספר הסודי A לאחר מספר כלשהו של תורות. האם יש לברווז אסטרטגיה המבטיחה לו ניצחון?

בהצלחה!