<u>האולימפיאדה הארצית ע"ש פרופ' גיליס ה'תשפ"ג - פתרונות</u>

1. סביב שולחן עגול יושבים 2000 אנשים. כל אחד מהם הוא או דובר אמת (שתמיד אומר את האמת) או שקרן (שתמיד משקר). כל אחד מהאנשים הכריז: "לפחות שניים משלושת האנשים הסמוכים אליי מימיני הם שקרנים". כמה דוברי אמת יש במעגל?

תשובה. 1000.

פתרון. עבור כל איש במעגל, אם הוא דובר אמת, אז אכן יש לפחות שני שקרנים מבין 3 האנשים שמימינו. אם הוא שקרן אז ההפך הוא הנכון, יש פחות משני שקרנים מבין 3 האנשים שמימינו, כלומר לפחות שניים מהם דוברי אמת. בכל מקרה, כל איש הוא מהסוג השונה מרוב האנשים מבין 3 האנשים שמימינו.

אם יש שני דוברי אמת ברצף, אז שני האנשים משמאלם שקרנים (כי עבור דובר האמת השמאלי, הוא צריך להיות שונה מהרוב מבין 3 האנשים שמימינו). שני האנשים הבאים משמאל הם דוברי אמת, באופן דומה, כשמסתכלים על השקרן השמאלי מהשניים, אחרי זה כשממשיכים שמאלה יש שני שקרנים וכך הלאה לכל אורך המעגל (המעגל באורך שמתחלק ב-4, ולכן כשנחזור לזוג דוברי האמת שהתחלנו מהם באמת שני אלה שישתבצו משמאלם יהיו שקרנים ולא תהיה בעיה).

דבר דומה קורה אם יש שני שקרנים ברצף, משמאלם יושבים שני דוברי אמת ואז חוזרים למקרה הקודם; כלומר במקרים אלה כל המעגל מורכב מזוגות מתחלפות של שקרנים ודוברי אמת.

המקרה האחר הוא שאין לא שני שקרנים ולא שני דוברי אמת ברצף, אז המעגל מורכב משקרנים ודוברי אמת ממוקמים באופן מתחלף.

בכל המקרים, מחצית האנשים הם דוברי אמת ומחצית הם שקרנים.

2. המספרים השלמים האי-שליליים x, y מקיימים $\sqrt{x}+\sqrt{x+60}=\sqrt{y}$. מהו הערך הגדול ביותר האפשרי של x?

תשובה. 196

פתרון. נעלה את שני האגפים בריבוע:

$$2x+60+2\sqrt{x\left(x+60\right)}=y$$

לכן $2\sqrt{x(x+60)}$ מספר שלם. לכן $x(x+60)$ הוא ריבוע של מספר שלם חלקי 2. כשמעלים בריבוע מספר אי-זוגי חלקי 2, מקבלים מספר לא שלם. לכן נוכל להסיק ש-$x(x+60)$ הוא ריבוע של מספר שלם: $x(x+60)=m^2$, כאשר m מספר שלם אי-שלילי.

מצד שני $x(x+60)+900=(x+30)^2=n^2$.

לכן $m^2+900=n^2$. מכאן $900=n^2-m^2=(n-m)(n+m)$.

בשביל לקבל איזשהו פתרון למשוואה זאת, צריך לפרק את $900=2^2\cdot3^2\cdot5^2$ למכפלה של שני גורמים מאותה זוגיות, הרי $n+m$ ו-$n-m$ הם מאותה זוגיות (ההפרש בינהם הוא זוגי ולכן או ששניהם זוגיים או ששניהם אי-זוגיים). מאחר שהתבקשנו למצוא רק את הפתרון עם ה-x הכי גדול, או באופן שקול $x+30=n$ הכי גדול, נרצה שסכום הגורמים $n+m$ ו-$n-m$ יהיה הכי גדול.

טענה. בהינתן מכפלה קבועה של שני גורמים חיוביים לא נתונים $P=u\cdot v$, בהנחה $u\le v$, אז סכומם $S=u+v$ יהיה גדול יותר ככל שהגורם הגדול v הוא גדול יותר והגורם הקטן u הוא קטן יותר.

הוכחת הטענה. ניתן לכתוב $u=s-q$, $v=s+q$ כאשר מספרים s,q חיוביים, $S=2s$. אז $P=s^2-q^2$. לכן בהינתן P, המספר s יהיה גדול יותר ככל ש-q גדול יותר, ואז גם $v=s+q$ גדול יותר וכמובן גם $S=2s$ גדול יותר. כמובן גם שבהינתן P קבוע, כמה ש-v גדול יותר, ככה $u=\dfrac{P}{v}$ קטן יותר.

כעת משהוכחנו את הטענה ניתן לסיים את הפתרון בקלות. הייתה לנו מכפלה של $n+m$ ו-$n-m$ שהיא $900=2^2\cdot3^2\cdot5^2$, ושני הגורמים מספרים שלמים חיוביים מאותה זוגיות. מכיוון שאחד הגורמים זוגי בהכרח (900 הוא זוגי), זה כמו להגיד ששני הגורמים זוגיים. לפי הטענה, סכום הגורמים הכי גדול מתקבל כאשר הגורם הקטן $n-m$ הוא הכי קטן שאפשר, והמספר החיובי הזוגי הכי קטן שיש הוא 2. במקרה זה $n-m=2$, ואז $n+m=450$, ולכן $2n=452$, כלומר $x+30=n=226$. לכן $x=196$.

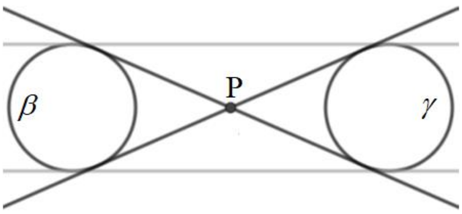
בסוף הפתרון של תרגיל כזה צריך להציב במשוואה המקורית ולבדוק אם התשובה עובדת:

$$\sqrt{196}+\sqrt{256}=\sqrt{y}$$

באגף השמאלי מקבלים $14+16$ וזה מספר שלם ולכן זה גם שורש של מספר שלם.

מכון ויצמן למדע
WEIZMANN INSTITUTE OF SCIENCE

3. נתון משולש ABC ומעגל כלשהו ω. נסמן ב- α את השיקוף של ω ביחס ל-A, נסמן ב- β את השיקוף של ω ביחס ל-B, ונסמן ב- γ את השיקוף של ω ביחס ל-C. נתון בנוסף שהמעגלים α,β,γ לא נחתכים כלל זה עם זה.



נסמן ב-P את נקודת מפגש המשיקים המשותפים הפנימיים של β ו- γ (ראו ציור). בדומה, נסמן ב-Q את נקודת מפגש המשיקים המשותפים הפנימיים של α ו- γ, ונסמן ב-R את נקודת מפגש המשיקים המשותפים הפנימיים של α ו- β.

הוכיחו כי המשולשים ABC ו- PQR חופפים זה לזה.

פתרון. נסמן ב-Z את מרכז המעגל ω, ונסמן ב- A', B', C' את מרכזי המעגלים α,β,γ בהתאמה. אז A' הוא השיקוף של Z ביחס ל-A. כלומר A הוא האמצע של $A'Z$, באופן דומה B ו-C הם האמצעים של הקטעים $B'Z$ ו- $C'Z$ בהתאמה. נקבל שהמשולש ABC יכול להתקבל מהמשולש $A'B'C'$ באמצעות קירוב של כל אחד מהקדקודים פי 2 אל הנקודה Z. נסיק שהמשולש ABC דומה ל- $A'B'C'$ וקטן ממנו פי 2.

כעת, נבחין כי המעגלים α,β,γ כולם שיקופים של המעגל ω, ולכן כולם עם אותו אורך רדיוס שהוא אורך הרדיוס של ω. לכן, מהסימטריה בין המעגלים β ו- γ, בהכרח P הוא האמצע של $B'C'$. באופן דומה Q ו-R הם האמצעים של $A'C'$ ושל $A'B'$. כלומר המשולש PQR הוא משולש אמצעי הצלעות של המשולש $A'B'C'$, ולכן PQR דומה ל- $A'B'C'$ וקטן ממנו פי 2. המסקנה האחרונה היא טענה מוכרת, ונובעת לדוגמה מכך שצלעות המשולש PQR מהוות את קטעי האמצעים במשולש $A'B'C'$, ולכן כל אחת שווה למחצית הצלע המתאימה של המשולש $A'B'C'$.

מפני שקיבלנו שגם המשולש ABC וגם המשולש PQR דומים ל- $A'B'C'$ וקטנים ממנו פי 2, נוכל להסיק ש- ABC ו-PQR חופפים.

4. עבור כל n שלם חיובי, מצאו את כל השלשות a,b,c של מספרים ממשיים כך שמתקיים:

$$\begin{cases} a = b^n + c^n \\ b = a^n + c^n \\ c = a^n + b^n \end{cases}$$

תשובה. יש את שתי האפשרויות $a=b=c=0$, ו- $a=b=c=\frac{1}{\sqrt[n-1]{2}}$, ובמקרה בו n הוא אי-זוגי מתווספת גם האפשרות $a=b=c=-\frac{1}{\sqrt[n-1]{2}}$.

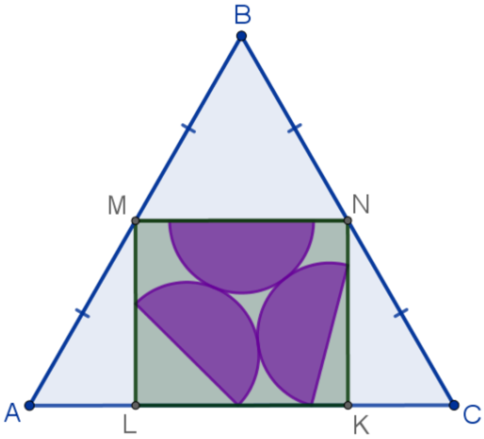
פתרון. ישנם שני מקרים: n זוגי או n אי-זוגי. במקרה בו n זוגי האגף הימני בכל משוואה במערכת הוא אי-שלילי; לכן גם האגפים השמאליים הם אי-שליליים, כלומר a,b,c כולם אי-שליליים.

עבור שני המקרים, נטען ש- a,b,c מקיימים כל אחד את הכלל הבא: ככל ש- x גדול יותר, ככה גם x^n הוא גדול יותר. במקרה ש- n הוא אי-זוגי זה מתקיים לכל המספרים הממשיים, ובמקרה ש- n הוא זוגי זה מתקיים למספרים האי-שליליים, אבל a,b,c הם אי-שליליים ולכן הם אכן מקיימים את הכלל. מכאן נוכל להסיק בקלות ש-a,b,c שווים זה לזה: אכן, אם למשל $a<b$, אז מקבלים סתירה: $a<b=a^n+c^n<b^n+c^n=a$, כלומר $a<a$. עבור כל מקרה אחר של שני מספרים שונים מבין a,b,c – מקבלים סתירה דומה. לפיכך $a=b=c$.

על מנת שהמערכת הנתונה תתקיים תחת התנאים הללו נותר לדרוש ש- $a=2a^n$. כאשר $a=0$ זה מתקיים; אחרת, ניתן לצמצם ב- a, ולקבל את המשוואה $1=2a^{n-1}$. אם $n-1$ אי-זוגי (כלומר n זוגי) נותר להוציא שורש ולקבל $a=\frac{1}{\sqrt[n-1]{2}}$. אם $n-1$ זוגי (כלומר n אי-זוגי) יהיו שני פתרונות $a=\pm\frac{1}{\sqrt[n-1]{2}}$.

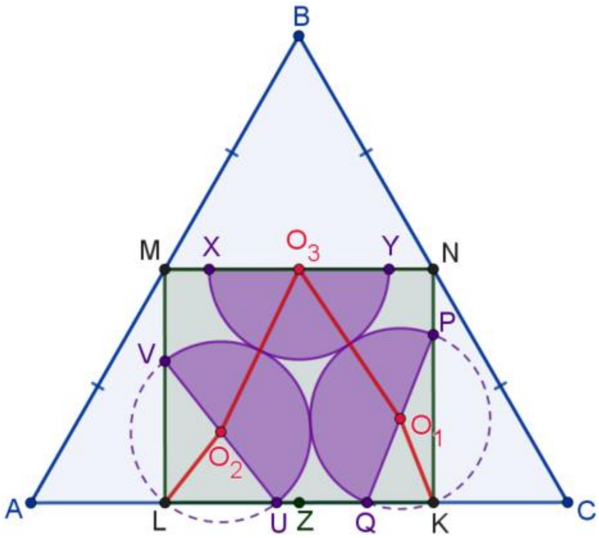
5. נתון משולש משוכלל ABC שכל צלעותיו הן באורך 1. אמצעי הצלעות AB ו-BC הם M ו-N. הנקודות K ו-L נבחרו על AC כך ש-KLMN הוא מלבן. בתוך מלבן זה נמצאים שלושה חצאי עיגולים בעלי אותו הרדיוס, באופן שמתואר בציור (קצותיהם נמצאים על צלעות המלבן, הקשתות משיקות זו לזו).

מהו הערך הקטן ביותר האפשרי עבור הרדיוס של חצאי העיגולים?



תשובה. $\frac{1}{6}$.

פתרון. נשתמש בסימונים כמו בציור משמאל: P,Q,U,V,X,Y הן נקודות הקצה של חצאי-העיגולים, O_1, O_2, O_3 הם המרכזים של העיגולים, ו- Z הוא האמצע של AC. בנוסף, נסמן ב- R את אורך הרדיוס של העיגולים.



נשים לב כי המרחק בין כל שני מרכזים של העיגולים הוא $2R$, כי המעגלים משיקים זה לזה.

מכיוון ש-KLMN הוא מלבן, K נמצא על המעגל שקוטרו PQ, ו-L נמצא על המעגל שקוטרו UV, לכן $O_1K = R = O_2L$.

אם O_3 הוא מרכז המעוין BMZN (כלומר אמצע MN), אז O_3K ו- O_3L הם קטעים אמצעיים במשולשים ZBC ו-ZBA בהתאמה. לכן במקרה זה $O_3K = \frac{1}{2} = O_3L$. אם O_3 שמאלי יותר בציור אז $O_3K > \frac{1}{2} > O_3L$, ואם הוא ימני יותר $O_3K < \frac{1}{2} < O_3L$. בכל מקרה מתקיים אחד מבין שני אי-השוויונות הבאים: $O_3K \geq \frac{1}{2}$ או $O_3L \geq \frac{1}{2}$.

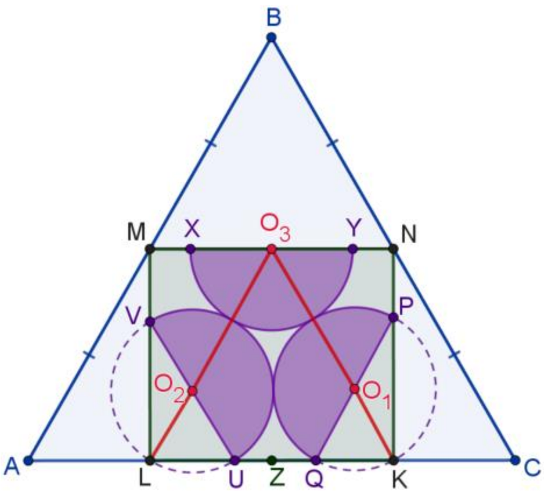
ניעזר באי-שוויון המשולש:

במקרה הראשון נקבל $3R = 2R + R = O_3O_1 + O_1K \geq O_3K \geq \frac{1}{2}$.

במקרה השני נקבל $3R = 2R + R = O_3O_2 + O_2L \ge O_3L \ge \frac{1}{2}$.

בכל מקרה מתקיים $3R \ge \frac{1}{2}$, כלומר $R \ge \frac{1}{6}$.

כל שנותר לנו הוא להראות שקיים מקרה בו $R = \frac{1}{6}$, ועל מנת שזה יתקיים צריך לבנות ציור בו כל אי-שוויון שרשמנו הופך לשוויון (אם באחד מאי-השוויונות אין שוויון אז נקבל שR גדול ממש מ $\frac{1}{6}$). כלומר צריך להתקיים גם ש- O_3 נמצא באמצע המעוין, וגם שהקווים השבורים KO_1O_3 ו-LO_2O_3 יהיו בעצם קווים ישרים.



בשביל זה, נבחר את האמצע של MN להיות O_3. נשים לב כי המשולש KLO_3 הוא שווה צלעות, וכל הצלעות שלו שוות ל- $\frac{1}{2}$. הרי O_3K ו- O_3L הם קטעי האמצעים במשולשים ZBC ו-ZBA, ו-KL שווה ל-MN שהוא קטע אמצעים במשולש ABC. נסמן $R = \frac{1}{6}$, ונבחר על הקטעים O_3K ו- O_3L את הנקודות O_1 ו- O_2 בהתאמה שתהיינה כל אחת במרחק $2R$ מ- O_3, ובמרחק R מקודקודים K ו-L בהתאמה. המשולש $O_1O_2O_3$ גם הוא שווה-צלעות כי הוא שווה-שוקיים ועם זווית בגודל 60° בין השוקיים. לכן המעגלים עם מרכזים ב- O_1,O_2,O_3 ורדיוס R משיקים זה לזה, וגם עוברים בנקודות K ו-L. היות ובנקודות K, L יש זוויות ישרות, נקבל שנקודות החיתוך של שני המעגלים התחתונים עם הצלעות האחרות של המלבן מרכיבות קטרים במעגלים האלה. לכן מתקבלים חצאי עיגולים מהסוג שביקשו בשאלה גם עבור $R = \frac{1}{6}$.

6. קבעו האם קיימת קבוצה S של 5783 מספרים ממשיים שונים בעלת התכונה הבאה:
לכל a,b ב- S (לא בהכרח שונים זה מזה) קיימים $c \neq d$ ב- S כך ש- $a \cdot b = c + d$.

תשובה. קיימת קבוצה כזו!

פתרון. נבנה דוגמה לקבוצה כזאת:

נתחיל מלהתבונן במשוואה $\boxed{x^{2891} = x^{2890} + 1}$. אם ננסה להציב $x = 1$, נראה שהאגף השמאלי הוא קטן יותר; אם ננסה להציב $x = 2$, נראה שהאגף השמאלי גדול בהרבה, לכן קיים פתרון למשוואה בתחום $1 < x < 2$. נבחר כזה פתרון ומרגע זה ואילך נקרא לו x.

נרכיב את S מ-5783 המספרים הבאים:

$$\boxed{\begin{array}{ccccccc} & 1 & \frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} & \frac{1}{x^3} & \cdots & \frac{1}{x^{2890}} \\ 0 & & & & & & \\ & -1 & -\frac{1}{x} & -\frac{1}{x^2} & -\frac{1}{x^3} & \cdots & -\frac{1}{x^{2890}} \end{array}}$$

נוכיח שקבוצה זאת אכן מקיימת את התנאי של השאלה.

עבור a,b ב- S, אם מבין a,b יש 0, אז מכפלתם היא 0, ואפשר לקבל אותה בהמון דרכים כסכום של שני מספרים שונים בקבוצה הנתונה (כל שני מספרים מאותה עמודה).

אחרת, המכפלה $a \cdot b$ היא $\pm\frac{1}{x^n}$, כאשר $0 \leq n \leq 5780$. אם $n \leq 2890$, אז $a \cdot b$ נמצאת כאיבר בתוך S, ואז נוכל להוסיף לו את 0 שהוא גם ב- S ולקבל את המכפלה כסכום של מספרים שונים.

נותר להבין את המקרה בו $2891 \leq n \leq 5780$. במקרה זה ניתן לרשום $n = 2890 + k$, כאשר $1 \leq k \leq 2890$. מהמשוואה שרשמנו בהתחלה מקבלים כי $x^{2891} - x^{2890} = 1$, ואחרי שמחלקים ב- x^n מקבלים כלומר $\frac{1}{x^n} = \frac{1}{x^k} - \frac{1}{x^{k-1}}$. כלומר אם המכפלה היא $\frac{1}{x^n}$ אז ניתן להציגה כסכום של $\frac{1}{x^k}$ ושל $-\frac{1}{x^{k-1}}$; באופן דומה אם המכפלה היא $-\frac{1}{x^n}$ אז ניתן להציגה כסכום של $-\frac{1}{x^k}$ ושל $\frac{1}{x^{k-1}}$.

7. איילה וברווז משחקים משחק. בתחילת המשחק, איילה בוחרת מספר שלם סודי A בין אחד למיליון. בכל תור של המשחק לאחר מכן, ברווז יכול לבחור מספר שלם B, ואיילה תגלה לו את הספרה השכיחה ביותר בייצוג העשרוני של המכפלה $A \cdot B$. במקרה שיש כמה ספרות שכולן הכי שכיחות, איילה תגלה לו את כולן. לדוגמא, אם $A \cdot B$ שווה 2022, איילה תגלה לברווז שהספרה 2 היא הכי שכיחה, ואם $A \cdot B$ שווה 5783783, איילה תגלה לברווז שהספרות 3, 7 ו-8 הן הכי שכיחות. מטרתו של ברווז היא לגלות בוודאות את המספר הסודי A לאחר מספר כלשהו של תורות. האם יש לברווז אסטרטגיה המבטיחה לו ניצחון?

תשובה. לברווז יש אסטרטגיה מנצחת.

פתרון. לאורך הפתרון, נאמר ששני מספרים שלמים חיוביים X ו-Y *ניתנים להפרדה*, אם קיים שלם חיובי B כך שאוסף הספרות השכיחות ביותר של XB שונה מאוסף הספרות השכיחות ביותר של YB. במקרה זה, נגיד ש-B *מפריד* בין X ל-Y.

אם נוכיח שכל שני מספרים בין אחד למיליון ניתנים להפרדה, הרי שלברווז יש אסטרטגיה מנצחת: לכל זוג X ו-Y שונים בין אחד למיליון, ברווז יבחר B המפריד ביניהם וישאל לגביו את איילה. לאחר כל השאלות האלה, ברווז ידע בוודאות מהו A הנכון: לכל מספר Z בין אחד למיליון השונה מ-A, התשובה של איילה לשאלה שמפרידה בין A ל-Z מוכיחה ש-Z אינו המספר הסודי הנכון, ועל כן המספר היחיד בין אחד למיליון שמתאים לכל התשובות של איילה הוא A. על כן, נותר רק להוכיח שכל שני מספרים בין אחד למיליון ניתנים להפרדה.

למה 1. אם המספרים X,Y לא ניתנים להפרדה, אז גם המספרים X^n, Y^n לא ניתנים להפרדה לכל n טבעי.

הוכחה. יהי B שלם חיובי. משום שX,Y לא ניתנים להפרדה, אוסף הספרות השכיחות של $X^nB = X \cdot (X^{n-1}B)$ זהה לאוסף הספרות השכיחות של $X^{n-1}YB = Y \cdot (X^{n-1}B)$.

מאותה סיבה, אוסף הספרות השכיחות של $X^{n-1}YB = X \cdot (X^{n-2}YB)$ זהה לאוסף הספרות השכיחות של $X^{n-2}Y^2B = Y \cdot (X^{n-2}YB)$. באותו אופן נובע שלכל $0 \leq k < n$, אוסף הספרות השכיחות של $C_k = X^{n-k}Y^kB$ זהה לאוסף הספרות השכיחות של C_{k+1}, אשר זהה לאוסף הספרות השכיחות של C_{k+2}, וכן הלאה. בסך הכול, נקבל כי אוסף הספרות השכיחות של $C_0 = X^nB$ זהה לאוסף הספרות השכיחות ביותר של $C_n = Y^nB$, וזה בדיוק מה שרצינו להוכיח.

למה 2. לכל X קיים N כך שבמספר NX, כל הספרות 0-9 מופיעות כמות זהה של פעמים.

הוכחה. נתבונן במספר מהצורה

123456789123456789.....123456789000...000

בו הרצף 123456789 חוזר על עצמו k פעמים, וגם הספרה 0 מופיעה בצד ימין k פעמים, כאשר k מספר גדול אשר יקבע בהמשך. במספר זה, כל ספרה מופיעה כמות זהה של פעמים. כמובן שגם אם נחליף את הסדר של חלק מהספרות, תכונה זו עדיין תתקיים. האסטרטגיה שלנו תהיה לבצע החלפות של חלק מהספרות כך שהמספר המתקבל יתחלק ב-X (ואז כמובן שהוא יהיה מהצורה NX עבור N כלשהו).

נציג ראשית את X בתור $2^a \cdot 5^b \cdot Z$ כאשר Z זר ל-10. נשים לב שאם $k \geq a, b$, אז המספר שבנינו מתחלק ב-10^k ובפרט ב-$2^a \cdot 5^b$ (וזה ישאר נכון גם אם נחליף בין חלק מזוגות הספרות 8 ו-9). נותר לוודא שהמספר יתחלק ב-Z.

נתבונן בזוג ספרות 8 ו-9 סמוכות כלשהן. מימין לספרה 9 יש $k + 9m$ ספרות אחרות, כאשר m היא כמות הרצפים שמימינה. לכן הספרה 9 תורמת $9 \cdot 10^{k+9m}$ למספר הכולל. באופן דומה, הספרה 8 תורמת $8 \cdot 10^{k+9m+1}$ למספר הכולל. אם נחליף בין שתי הספרות, זה יהיה כמו לחבר 10^{k+9m+1} למספר ואז להחסיר ממנו 10^{k+9m}, כלומר בסך הכול המספר יגדל ב-$9 \cdot 10^{k+9m}$. אם נבצע d חילופים כאלו במקומות שונים $m_1, \dots, m_d$, המספר הכולל יגדל ב-

$$9 \cdot 10^{k+9m_1} + \cdots + 9 \cdot 10^{k+9m_d} = 9 \cdot 10^k \cdot (10^{9m_1} + \cdots + 10^{9m_d})$$

ניזכר כי לפי משפט אוילר, $10^{\phi(Z)} - 1$ מתחלק ב-Z, כאשר ϕ היא פונקציית אוילר. כמו כן, $10^m - 1$ מתחלק ב-Z לכל m אשר מתחלק ב-$\phi(Z)$. נניח שאנחנו מחליפים d זוגות ספרות 8 ו-9 כמתואר לעיל, אבל רק במיקומים שעבורם m מתחלק ב-$\phi(Z)$. אם נסמן ב-M את המספר ההתחלתי לפני ההחלפות, המספר הסופי שלנו אחרי ההחלפות יהיה

$$M + 9 \cdot 10^k \cdot (10^{9m_1} + \cdots + 10^{9m_d})$$

ומשום ששארית החלוקה של 10^{9m_i} בחלוקה ב-Z היא 1, שארית החלוקה של המספר לעיל ב-Z זהה לשל המספר

$$M + 9 \cdot 10^k \cdot (1 + \cdots + 1) = M + 9 \cdot 10^k \cdot d$$

ולכן מספיק למצוא d עבורו $M + 9 \cdot 10^k \cdot d$ מתחלק ב-Z. בשלב זה, נבחין כי המספר M מתחלק ב-9: אכן, סכום ספרותיו הוא $(1 + 2 + 3 + \cdots + 9) \cdot k = 45k$ אשר מתחלק ב-9, ולכן $M = 9M'$ עבור M' שלם. משום ש-Z זר ל-10^k, קיים d שלם עבורו $M' + 10^k \cdot d$ מתחלק ב-Z, ולמעשה ניתן לבחור d כזה המקיים $0 \leq d < Z$. עבור ערך זה של d, נקבל שגם המספר $M + 9 \cdot 10^k \cdot d = 9 \cdot (M' + 10^k \cdot d)$ מתחלק ב-Z, ובמצב זה גם המספר שבנינו יתחלק ב-Z כפי שרצינו.

נותר לבחור ערך של k כך שהבניה לעיל תתאפשר. כפי שציינו בהתחלה, אנו מוכרחים לבחור $k \geq a, b$ כאשר $X = 2^a \cdot 5^b \cdot Z$. כמו כן, הנחנו שאנחנו יכולים לבצע d החלפות של ספרות 8 ו-9 ברצפים שמיקומם מתחלק ב-$\phi(Z)$, ולכן אנחנו צריכים שיהיו קיימים מספיק רצפים כאלה במספר. ספציפית, מספיק שיתקיים $k \geq \phi(Z) \cdot d$. משום ש- $d <$ Z, מספיק לדרוש $k \geq \phi(Z) \cdot Z$. בסך הכול, אם נבחר למשל $k =$ $\max(a, b, Z \cdot \phi(Z))$, נוכל לבנות מספר מתאים באופן שתואר.

למה 3. לכל $X < Y$ בין 1 למיליון קיים n טבעי עבורו $10 \leq \frac{Y^n}{X^n} \leq 10^6$.

הוכחה: נשים לב שמתקיים $1 < \frac{Y}{X} \leq Y \leq 10^6$. נחלק לשני מקרים: אם $10 \leq \frac{Y}{X}$, אז $n = 1$ מקיים את תנאי הלמה. אם $\frac{Y}{X} < 10$, נשים לב שעבור n גדול מספיק מתקיים $\frac{Y^n}{X^n} \geq 10$ (משום ש-$\frac{Y}{X} > 1$). נבחר את n להיות המינימלי המקיים את התנאי הזה. בפרט, התנאי הזה לא מתקיים עבור $n - 1$ ולכן

$$\frac{Y^n}{X^n} = \frac{Y^{n-1}}{X^{n-1}} \cdot \frac{Y}{X} \leq 10 \cdot 10 < 10^6$$

ועל כן n מקיים את תנאי הלמה.

כעת ניתן לסיים את הפתרון בעזרת הלמות. נניח בשלילה שהמספרים X ו-Y בין 1 למיליון שונים זה מזה ולא ניתנים להפרדה, ונניח ללא הגבלת הכלליות כי $X < Y$. לפי למה 3, קיים n עבורו $10 \leq \frac{Y^n}{X^n} \leq 10^6$. לפי למה 2, קיים N עבורו במספר $N \cdot X^n$ כל ספרה עשרונית מופיעה כמות זהה של פעמים (ולכן כל הספרות הן הכי שכיחות). בפרט, כמות הספרות במספר זה היא $10k$ עבור k כלשהו, כלומר

$$10^{10k} \leq N \cdot X^n < 10^{10k+1}.$$

משום ש- $N \cdot Y^n = N \cdot X^n \cdot \frac{Y^n}{X^n}$, נקבל $10^{10k+1} \leq N \cdot Y^n < 10^{10k+7}$, כלומר כמות הספרות של $N \cdot Y^n$ היא בין $10k + 1$ לבין $10k + 6$, ולכן אינה מתחלקת ב-10. בפרט, לא יתכן שהמספר $N \cdot Y^n$ מכיל כל ספרה עשרונית כמות זהה של פעמים. על כן N מפריד בין X^n ו-Y^n, בסתירה ללמה 1. לכן כל שני מספרים ניתנים להפרדה, ועל כן לברווז יש אסטרטגיה מנצחת כפי שצוין בתחילת הפתרון.