אולימפיאדת גיליס תשפ"ב – פתרונות

1. בחדר נמצאים מספר אנשים, חלקם תמיד משקרים והאחרים תמיד אומרים את האמת. הגילאים של כולם שונים. כל אחד מהם אומר אחד מההיגדים הבאים:

"בחדר זה יש מספר שווה של דוברי אמת מבוגרים ממני ושל דוברי שקר צעירים ממני"

או

"בחדר זה יש מספר שווה של דוברי שקר מבוגרים ממני ושל דוברי אמת צעירים ממני"

מהו המספר המקסימלי האפשרי של דוברי אמת שיש בחדר?

מצאו דוגמה בה מתקבל המספר המקסימלי והראו שלא יתכן מספר גדול יותר.

תשובה. שני דוברי אמת.

פתרון. נטען שלא יתכן שיש שני דוברי אמת שאמרו את אותו ההיגד. אכן, נניח למשל שאת האמירה הראשונה אמרו שני דוברי אמת, A ו-B, כאשר A יותר מבוגר מ-B. מכאן שכמות דוברי האמת המבוגרים מ-A שווה לכמות דוברי השקר הצעירים ממנו, ונסמן כמות זו ב-X. באופן דומה, כמות דוברי האמת המבוגרים מ-B שווה לכמות דוברי השקר הצעירים ממנו, ונסמן כמות זו ב-Y.

מצד אחד, רשימת דוברי האמת המבוגרים יותר מ-B מכילה את רשימת דוברי האמת המבוגרים יותר מ-A, ולמעשה הרשימה של B אפילו יותר גדולה כי היא מכילה גם את A עצמו (הוא מבוגר יותר מ-B אך לא מבוגר יותר מ-A). לכן יש יותר דוברי אמת המבוגרים מ-B מאשר מ-A, כלומר $X < Y$.

מצד שני, רשימת דוברי השקר הצעירים יותר מ-B מוכלת ברשימת דוברי השקר הצעירים יותר מ-A. לכן כמות דוברי השקר הצעירים מ-B קטנה או שווה לכמות המתאימה עבור A, כלומר $X \geq Y$. אך זו סתירה לכך ש-$X < Y$, ולכן לא יתכן ש-A ו-B שניהם אמרו את ההיגד.

באופן דומה ניתן להוכיח שלא יכול להיות ששני דוברי אמת אמרו את ההיגד השני. מכאן שיש לכל היותר דובר אמת אחד שאמר את ההיגד הראשון, ולכל היותר אחד שאמר את ההיגד השני, ולכן סך הכול יש לכל היותר שני דוברי אמת.

אנחנו נראה שתי דוגמאות לכך שיכול להיות בדיוק שני דוברי אמת.

דוגמה ראשונה: יש בחדר רק שני אנשים, A ו-B, כאשר A מבוגר מ-B ושניהם דוברי אמת. אז A יוכל להגיד את ההיגד הראשון בעוד ש-B יגיד את ההיגד השני, ושניהם יהיו נכונים.

דוגמה שנייה: יש בחדר ארבעה אנשים, A, B, C, D שמסודרים לפי גיל (כך ש-A הכי מבוגר ו-D הכי צעיר), כאשר B ו-C דוברי אמת, A ו-D שקרנים. אז B יכול להגיד את ההיגד השני, ו-C את ההיגד הראשון, ושניהם יהיו נכונים. מבחינת A ו-D, קל לבדוק כי כל אחד מההיגדים שקרי לגבי כל אחד מהם – אבל הם שקרנים, אז זה טוב לנו.

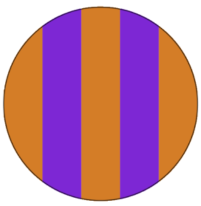
2. מספרים ממשיים a,b,c,d,e,f,k,m מקיימים $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=k$, וגם $\frac{b}{c}+\frac{d}{e}+\frac{f}{a}=m$,
וגם $ad=be=cf$. בטאו את $\frac{a}{c}+\frac{c}{e}+\frac{e}{a}+\frac{b}{d}+\frac{d}{f}+\frac{f}{b}$ באמצעות k ו-m.

תשובה. $k\cdot m-3$

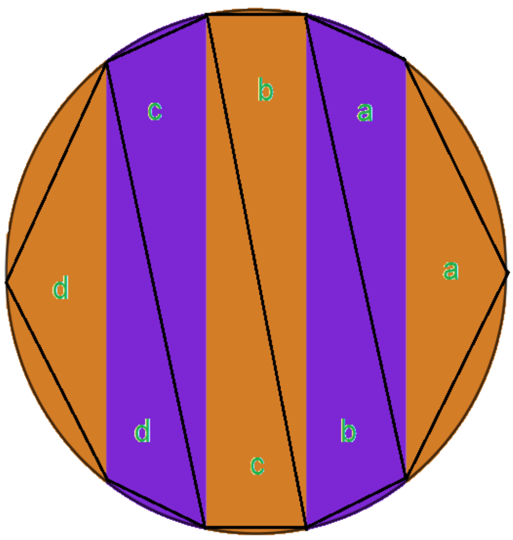
פתרון. נשים לב כי

$$k\cdot m=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{d}{e}+\frac{f}{a}\right)=$$
$$=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}+\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{e}+\frac{e}{f}\cdot\frac{f}{a}+\frac{a}{b}\cdot\frac{f}{a}+\frac{c}{d}\cdot\frac{b}{c}+\frac{e}{f}\cdot\frac{d}{e}+\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{e}+\frac{c}{d}\cdot\frac{f}{a}+\frac{e}{f}\cdot\frac{b}{c}=$$
$$=\frac{a}{c}+\frac{c}{e}+\frac{e}{a}+\frac{f}{b}+\frac{b}{d}+\frac{d}{f}+\frac{ad}{be}+\frac{cf}{fa}+\frac{cf}{da}=$$
$$=\frac{a}{c}+\frac{c}{e}+\frac{e}{a}+\frac{f}{b}+\frac{b}{d}+\frac{d}{f}+1+1+1$$

לכן $\frac{a}{c}+\frac{c}{e}+\frac{e}{a}+\frac{f}{b}+\frac{b}{d}+\frac{d}{f}=k\cdot m-3$.



3. יהא w מעגל בעל קוטר 5. העבירו 4 ישרים שמחלקים את w ל-5 "רצועות" שרוחב כל אחת מהן הוא 1. את הרצועות הללו צבעו בכתום ובסגול לסירוגין, כמתואר בציור. איזה שטח גדול יותר, הכתום או הסגול?



פתרון. תחילה, נעביר את הקטעים כמתואר בציור. כאשר הקצה הימני של הקטע הימני ביותר זוהי הנקודה הימנית ביותר על המעגל וכן גם בצד השמאלי.

כעת, נשתמש בכך ששטח של משולש הוא צלע כפול הגובה אליה חלקי 2.

המשולש הכתום הימני והמשולש הסגול הימני עם אותו שטח a כי יש להם צלע משותפת, וכן הגבהים שלהם לאותה הצלע הם 1.

בדומה לכך, אנו מקבלים שוויוני שטחים בין כל המשולשים המתוארים בציור (עם שטחים b, c, d).

לכן, כדי לבדוק איזה שטח גדול יותר (כתום או סגול) נותר לנו לבדוק איזה שטח גדול יותר על שפת המעגל. נרצה להגיד שהשטח הכתום בין המיתרים למעגל גדול יותר מהשטח הסגול בין המיתרים למעגל. נשים לב, שככל שהמיתר גדול יותר, כך השטח גדול יותר, ולכן, מספיק יהיה להראות שהמיתר הכתום הימני התחתון גדול יותר מהמיתר הסגול הימני התחתון, ואז נקבל מסימטריה שהשטח הכתום גדול יותר.

לכן, נותר לנו לחשב את המיתרים הללו נסמן את מרכז המעגל ב-$(0,0)$:

כתום: הנקודה הימנית של מיתר זה היא $(2.5,0)$ והנקודה השמאלית היא $(1.5,-2)$ ולכן אורך הקטע הוא:

$$\sqrt{(2.5-1.5)^2+2^2}=\sqrt{5}$$

סגול: הנקודה הימנית של מיתר זה היא $(1.5,-2)$ והנקודה השמאלית היא $(0.5,\sqrt{5-0.5^2})$ ולכן אורך הקטע הוא:

$$\sqrt{(1.5-0.5)^2+\left(\sqrt{5-0.5^2}-2\right)^2}<\sqrt{1+(3-2)^2}<\sqrt{5}$$

ולכן קיבלנו את מה שרצינו.

4. מצאו את כל השלשות (a,b,c) של מספרים שלמים עבורן למשוואה
$$x^3-a^2x^2+b^2x-ab+3c=0$$
יש שלושה פתרונות שלמים שונים x_1,x_2,x_3 שהם זרים בזוגות (כלומר, לאף שניים מבין הפתרונות אין מחלק משותף גדול מ-1).

פתרון. נראה כי לכל a,b,c שלמים, למשוואה הנ״ל לא יכולים להיות שלושה פתרונות שלמים שונים שזרים בזוגות.

נניח בשלילה שכן. יהיו a,b,c מספרים שלמים, כך שפתרונות המשוואה

$$p(x)=x^3-a^2x^2+b^2x-ab+3c=0$$

הינם מספרים שלמים שונים וזרים בזוגות. נסמנם ב u,v,w.

אזי, לפי נוסחאות ויאטה (ראו הסבר בסוף הפתרון) מתקיים:

$$(1)\ u+v+w=a^2$$
$$(2)\ uv+vw+wu=b^2$$
$$(3)\ uvw=ab-3c$$

אם נסתכל על המשוואה השלישית, היא בעצם אומרת של uvw ו ab ישנה אותה שארית חלוקה ב 3.

נשים לב גם, שמכיוון ש u,v,w זרים, לכל היותר אחד מהם מתחלק ב 3. נפריד לשני מקרים.

<u>מקרה א:</u> u,v,w אינם מתחלקים ב 3. לכן uvw אינו מתחלק ב 3. ממשוואה (3), גם ab לא מתחלק ב 3. לכן, a,b אינם מתחלקים ב 3.

<u>למה:</u> שארית החלוקה של ריבוע ב-3 הינה 0 או 1. (ראו הוכחה בסוף הפתרון)

מכיוון ש a,b אינם מתחלקים ב 3, כנ"ל ל a^2,b^2, ולכן שארית חלוקתם ב 3 הינה 1. קיבלנו ששארית החלוקה ב 3 של $u+v+w$ הינה 1, כששארית החלוקה ב 3 של כל אחד מהמחוברים הינה 1 או 2. אם שלושת המחוברים בעלי שארית זהה, אזי סכומם בעל שארית אפס. אם שניים מהמחוברים בעלי שארית 2 ואחד בעל שארית 1, נקבל שסכום השאריות הוא 2. האפשרות היחידה שנותרה- ושאכן נותנת שארית 1 לסכום- היא ששניים מהמחוברים בעלי שארית 1, ומחובר נוסף בעל שארית 2.

אבל במקרה זה, השארית חלוקה ב 3 של $uv+vw+wu$ יוצאת 2, כלומר b^2 נותן שארית 2 בחלוקה ב 3, סתירה.

<u>מקרה ב:</u> אחד מבין u,v,w מתחלק ב 3- נניח, ללא הגבלת הכלליות, שזה w. אזי, המספרים הבאים מתחלקים ב 3:

$$(1)\ u+v-a^2$$
$$(2)\ uv-b^2$$
$$(3)\ ab$$

ממשוואה (3) נובע, שאחד מבין a,b מתחלק ב 3. אם b מתחלק ב 3, אזי ממשוואה (2) גם uv מתחלק ב 3, כלומר לפחות אחד מבין u,v מתחלק ב 3, סתירה.

לכן b לא מתחלק ב 3, ולכן a כן. ממשוואה (1) נובע ש $u+v$ מתחלק ב 3. אם ל u,v שארית חלוקה זהה שהיא 1 או 2, אזי לסכומם תהיה שארית חלוקה שהיא 2 או 1, בהתאמה. לכן, הדרך היחידה לקבל שארית חלוקה 0 הינה שאחד מהם יהיה 1 והשני 2, אבל אז שארית החלוקה של uv תהיה 2. ממשוואה (2), שארית החלוקה של b^2 תהיה 2, בסתירה ללמה.

בשני המקרים הגענו לסתירה, ולכן אין a, b, c שלמים עבורם הדרוש מתקיים.

<u>**הוכחת הלמה:**</u> אם n מתחלק ב-3, אזי גם n^2 והוא נותן שארית חלוקה 0.

אם n נותן שארית חלוקה 1 בחלוקה ב-3, אזי n^2 נותן שארית חלוקה $1 = 1^2$.

אם n נותן שארית חלוקה 2 בחלוקה ב-3, אזי n^2 נותן שארית חלוקה $4 = 2^2$, אבל שארית החלוקה של 4 ב-3 הינה 1.

<u>**הסבר על נוסחאות ויאטה:**</u> יש לנו פולינום $p(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$. הפתרונות למשוואה $p(x) = 0$ נקראים *השורשים* של הפולינום.

אם u, v, w הם שורשי הפולינום $p(x)$, אזי אפשר לרשום:

$$\begin{aligned} &p(x) = (x-u)(x-v)(x-w) = \\ &= x^3 - (u+v+w)x^2 + (uv+vw+wu)x - uvw \end{aligned}$$

ואז המשוואות הבאות מתקבלות מהשוואת המקדמים של x^3, x^2, x והמקדם החופשי:

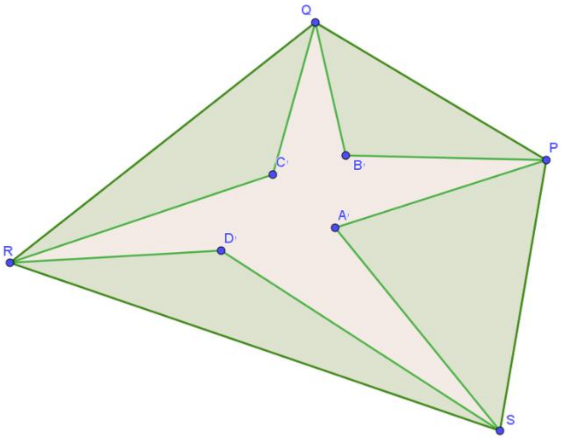
$$\begin{aligned} &(1)\ u+v+w = -A \\ &(2)\ uv+vw+wu = B \\ &(3)\ uvw = -C \end{aligned}$$

במקרה שלנו הפולינום הוא $p(x) = x^3 - a^2x^2 + b^2x - ab + 3c$, וכאשר מציבים את הערכים המתאימים של המקדמים A, B, C מקבלים את המשוואות בהן השתמשנו בפתרון.

5. מרובע קמור מנייר ABCD יקרא **<u>מתקפל</u>**, אם קיימות נקודות P, Q, R, S על החלק הפנימי של הצלעות AB, BC, CD, DA בהתאמה, כך שאם נקפל פנימה את כל המשולשים SAP, PBQ, QCR, RDS, הם יכסו בדיוק את המרובע PQRS. כלומר, אם הקיפולים של המשולשים יכסו את המרובע PQRS אך לא יעלו זה על זה.

הוכיחו שאם המרובע ABCD מתקפל, אז AC מאונך ל-BD או ש-ABCD טרפז.

פתרון. נלך מהסוף להתחלה. נתחיל ממרובע כלשהו $PQRS$ וננסה לבנות בתוכו 4 משולשים כך שכשנפתח אותם נקבל מרובע, שבדיעבד יהיה $ABCD$. כך נוכל לגלות פרטים על המרובע שלנו.



אז אנו רוצים לפרק את $PQRS$ ל-4 משולשים $SA'P, PB'Q, QC'R, RD'S$ (ואז A, B, C, D יהיו השיקופים של A', B', C', D' ביחס לצלעות המרובע). ננסה להבין איך המשולשים יכולים להיות בנויים בתוך המרובע:

נתבונן במשולש $PB'Q$. מכך ש-Q היא נקודה רק של המשולשים $PB'Q, QC'R$ אז נקבל ש-C' צריכה להיות על הישר QB' (כי המשולשים צריכים לכסות את המרובע). באותה צורה, נקבל שהשלשות $RC'D', SD'A', PA'B'$ על ישרים.

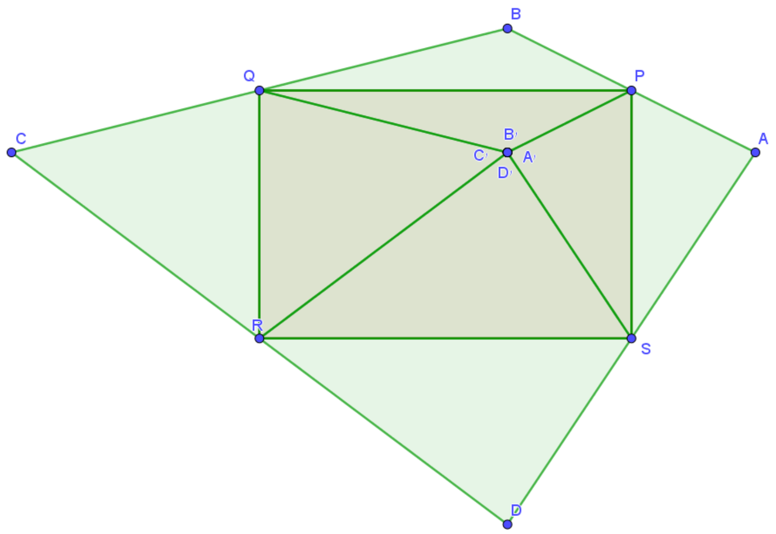
כעת, נזכור ש-A היא שיקוף של A' ביחס ל-SP ו-B היא שיקוף של B' ביחס ל-PQ. מכך שאנחנו רוצים ש-P תהיה על AB אז נקבל שמתקיים:

$$180° = \sphericalangle APB = \sphericalangle APA' + \sphericalangle BPB' = 2 \cdot \sphericalangle SPA' + 2 \cdot \sphericalangle QPB'$$
$$= 2 \cdot \sphericalangle SPA' + 2 \cdot \sphericalangle QPA' = 2 \cdot \sphericalangle SPQ$$

ולכן $\sphericalangle SPQ = 90°$. בצורה דומה, כל הזוויות במרובע $PQRS$ ישרות, כלומר $PQRS$ מלבן.

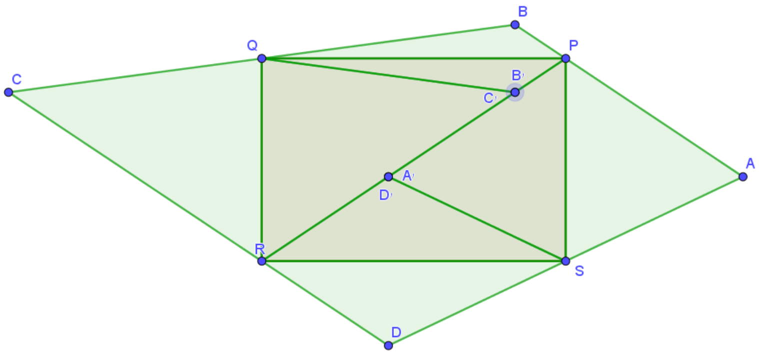
כעת, נשים לב, שסכום הזוויות ב-4 המשולשים הוא $4 \cdot 180° = 720°$. ומכך שסכום הזוויות שמרובע הוא $360°$ אז צריכה להיות לפחות נקודה אחת מבין A', B', C', D' שאינה על קודקודי המרובע. נקבל את האפשרויות הבאות:

א. $A' = B' = C' = D'$ ואז מתקיים שלארבעת המשולשים יש קודקוד משותף. מתכונת



השיקוף, נקבל ש-$AP = PA' = PB' = PB$ וכן גם עבור Q, R, S. ולכן, נקבל ש-$PQRS$ מרובע אמצעי הצלעות של $ABCD$. נשים לב, שמקטע אמצעים, מתקיים ש-AC מקביל ל-SP וכן ש-BD מקביל ל-PQ. ומכך ש-$PQRS$ מלבן, נקבל שהישרים PS, PQ מאונכים וממקבילות, נקבל ש-AC מאונך ל-BD.

ב. בלי הגבלת הכלליות, $A' \neq B'$. נשים לב, שהדרך היחידה שבה יש נקודה, שהיא קודקוד של לפחות משולש אחד, ואינה אחד מ-4 קודקודי המרובע, כך שהיא אינה מוסיפה $360°$ לסכום הזוויות



שלנו, זה רק כאשר היא נמצאת על צלע של איזשהו משולש, והיא קודקוד של לפחות 2 משולשים. ואז היא תוסיף לנו $180°$ לסכום הזוויות. לכן, אם $A' \neq B'$ אז A' תהיה קודקוד של 2 משולשים לפחות, וכך גם B', ולכן הם יהיו קודקודים של 2 משולשים בדיוק. לכן מתקיים $A' = D'$ ובאותה הצורה $B' = C'$ ובנוסף, נקבל שמתקיים:

$$\sphericalangle RD'S + \sphericalangle SA'P = 180°$$

ואז נקבל שמהשיקוף, מתקיים:

$$180° = \sphericalangle RD'S + \sphericalangle SA'P = \sphericalangle RDS + \sphericalangle SAP = \sphericalangle CDA + \sphericalangle DAB$$

ולכן, נקבל ש-AB מקביל ל-CD.

הערה: ניתן יחסית בקלות להוכיח כי A', B' נמצאות על האלכסון PR.

6. יהיו x, y ו-z מספרים אי-שליליים. הוכיחו כי :

$$\sqrt{(2x+y)(2x+z)}+\sqrt{(2y+x)(2y+z)}+\sqrt{(2z+x)(2z+y)}\ge$$
$$\ge\sqrt{(x+2y)(x+2z)}+\sqrt{(y+2x)(y+2z)}+\sqrt{(z+2x)(z+2y)}.$$

פתרון ראשון. ברישום מקוצר: $\sum_{cyc}\sqrt{(2x+y)(2x+z)}\ge\sum_{cyc}\sqrt{(x+2y)(x+2z)}$

$$\sum_{cyc}\sqrt{(2x+y)(2x+z)}=\frac{1}{2}\sum_{cyc}\sqrt{(3x+x+2y)(3x+x+2z)}\ge$$
$$\ge\frac{1}{2}\sum_{cyc}\left(3x+\sqrt{(x+2y)(x+2z)}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{cyc}\left(\frac{x+2y+x+2z}{2}+\sqrt{(x+2y)(x+2z)}\right)\ge\sum_{cyc}\sqrt{(x+2y)(x+2z)}$$

נסביר את שני המעברים שהן לא זהויות. המעבר הראשון הוא אי-שוויון קושי-שוורץ. כידוע, לכל שני ווקטורים מכפלה סקלרית קטנה יותר ממכפלת האורכים:

$$\sqrt{\left(x_1^2+y_1^2\right)\left(x_2^2+y_2^2\right)}\ge x_1x_2+y_1y_2$$

במעבר הראשון השתמשנו בזה כאשר

$$x_1=\sqrt{3a}\qquad x_2=\sqrt{3a}$$
$$y_1=\sqrt{a+2b}\qquad y_2=\sqrt{a+2c}$$

ולכן אמרנו כי $\sqrt{(3a+a+2b)(3a+a+2c)}\ge 3a+\sqrt{(a+2b)(a+2c)}$

במעבר האחרון השתמשנו באי-שוויון הממוצעים. כידוע, ממוצע חשבוני גדול או שווה לממוצע הנדסי, כלומר $\frac{X+Y}{2}\ge\sqrt{XY}$. אם ניקח $X=a+2b$, $Y=a+2c$ אז נקבל כי $\frac{(a+2b)+(a+2c)}{2}\ge\sqrt{(a+2b)(a+2c)}$.

פתרון שני. ניסוח שקול: $-2\sum_{cyc}\sqrt{(2x+y)(2x+z)} \geq -2\sum_{cyc}\sqrt{(x+2y)(x+2z)}$.

$$\sum_{cyc}\left(\sqrt{x+2y}-\sqrt{x+2z}\right)^2 \geq \sum_{cyc}\left(\sqrt{2x+y}-\sqrt{2x+z}\right)^2$$

אכן, לו היינו פותחים סוגריים, הריבועים היו מתקזזים והיינו נשארים עם המכפלות הכפולות.
כעת נשתמש ברעיון של כפל בצמוד:

$$\sqrt{A}-\sqrt{B}=\frac{\left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}\right)}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}=\frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$$

ונשכתב את אי-השוויון בצורה:

$$\sum_{cyc}\frac{4(y-z)^2}{\left(\sqrt{x+2y}+\sqrt{x+2z}\right)^2} \geq \sum_{cyc}\frac{(y-z)^2}{\left(\sqrt{2x+y}+\sqrt{2x+z}\right)^2}$$

מספיק להראות כי

$$\frac{4(y-z)^2}{\left(\sqrt{x+2y}+\sqrt{x+2z}\right)^2} \geq \frac{(y-z)^2}{\left(\sqrt{2x+y}+\sqrt{2x+z}\right)^2}$$

נכפיל במכנה:

$$4\left(\sqrt{2x+y}+\sqrt{2x+z}\right)^2 \geq \left(\sqrt{x+2y}+\sqrt{x+2z}\right)^2$$

$$2\left(\sqrt{2x+y}+\sqrt{2x+z}\right) \geq \sqrt{x+2y}+\sqrt{x+2z}$$

מספיק להראות כי $2\sqrt{2x+y} \geq \sqrt{x+2y}$ ועוד אי-שוויון מאותו הסוג. נעלה בריבוע:

$$4(2x+y) \geq x+2y$$

וזה ברור.

פתרון שלישי. נזכיר אי-שוויון תמורות. בהינתן שתי סדרות של מספרים $\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix}$, נשאל מתי הביטוי $a_1b_i+a_2b_j+a_3b_k$ הוא הכי גדול או הכי קטן, כאשר (i,j,k) היא תמורה של $(1,2,3)$. המשפט אומר, שהערך יהיה הכי גדול כאשר הסדר תואם (ה a הכי גדול מוכפל ב b הכי גדול, ה a הבינוני מוכפל ב b הבינוני, והכי קטן בהכי קטן) והערך יהיה הכי קטן כשהסדר הפוך (הכי גדול מוכפל בהכי קטן, והכי קטן בהכי גדול). כעת נסתכל על שתי הסדרות הבאות:

$$\begin{matrix} \sqrt{x+2y} & \sqrt{y+2z} & \sqrt{z+2x} \\ \sqrt{x+2z} & \sqrt{y+2x} & \sqrt{z+2y} \end{matrix}$$

שני האגפים מתקבלים כאשר כופלים את המספרים משורה הראשונה במספרים מהשורה השנייה; אגף ימין מתקבל כאשר כופלים מספרים באותה העמודה, ואגף שמאל מתמורה שונה. הטענה היא שאגף שמאל יותר קטן, כי הוא קשור לסדר הפוך. מבחינת הסדר של מספרים, זה לא משנה אם נעלה את כל המספרים בריבוע:

$$\begin{matrix} x+2y & y+2z & z+2x \\ x+2z & y+2x & z+2y \end{matrix}$$

אז בכל עמודה הסכום הוא $2x+2y+2z$. זה אומר שמול מספר הכי גדול בשורה ראשונה יש מספר הכי קטן בעמודה שנייה, ולהפך, כלומר האגף השמאלי מתקשר לסדר הפוך.

7. גנדלף (הקוסם) ובילבו (העוזר של הקוסם) מראים קסם ניצן (הצופה). בזמן שגנדלף יוצא מהחדר, ניצן בוחר מספר שלם בין 1 ל-2^{2022} ומראה אותו אותו לבילבו. בילבו כותב שורה ארוכה של N ספרות על הלוח, כאשר כל ספרה היא 0 או 1. אחרי זה ניצן יכול, אם הוא רוצה, להחליף בין שתי ספרות סמוכות בשורה, אבל רק פעם אחת. אחרי זה גנדלף חוזר לחדר, מסתכל על השורה ומנחש את המספר שניצן בחר.
האם בילבו וגנדלף יכולים להמציא אסטרטגיה שתאפשר לגנדלף תמיד לנחש נכון את המספר ללא תלות בהתנהגות של ניצן,
א. עבור $N = 2500$?
ב. עבור $N = 2030$?
ג. עבור $N = 2040$?

פתרון. אנחנו נראה כי עבור $N = 2040$ הקסם אפשרי, ועבור $N = 2030$ הקסם לא אפשרי, ואז יהיה גם ברור שעבור $N = 3000$ הקסם אפשרי.

נתחיל משיטה עבור $N = 2040$.

שיטה ראשונה. כל מספר מ-1 עד 2^{2022}, לאחר שמחסירים ממנו 1, ניתן לרשום באמצעות 2022 ספרות שהן אפסים ואחדים (רישום בינארי רגיל). כמובן, ניצן יוכל לחבל ברישום בצורה זו או אחרת, ואם הוא יעשה זאת גנדלף ירצה לדעת כיצד בדיוק זה נעשה.
אז בילבו יתחיל מהרישום הבינארי של המספר המופחת ב-1, ימשיך עם שתי ספרות הפרדה שהן שני אפסים, לאחר מכן הוא ירשום 12 ספרות בקרה שעוד מעט נסביר איך בונים אותם לפי מספר, לאחר מכן אפס נוסף, ולבסוף ספרת ביקורת אחרונה שעוד מעט נסביר איך בונים אותה. סה"כ נחוצות לנו $2022+2+12+1+1=2036$ ספרות.
כעת נסביר כיצד בונים את 12 ספרות הבקרה. לכל אחת מבין ה-2022 ספרות הראשונות ניתן לתת מספר סידורי, שהוא מספר 11-ספרתי המורכב מאפסים ואחדים (מכיוון ש-$2^{11} > 2022$).
לכל K כך ש-$1 \le \mathrm{K} \le 11$ ניתן להפריד את 2022 הספרות הראשונות לשני סוגים: אלה שהספרה ה-K מימין במספר הסידורי שלהם היא 0 ואלה שהספרה ה-K מימין במספר הסידורי שלהם היא 1.
כל ספרת בקרה תהיה 1 אם מבין מחלקה מסוימת של ספרות מבין 2022 הספרות הראשונות יש מספר אי-זוגי של אחדים (נגדיר את המחלקה במדויק עוד מעט לכל ספרות הבקרה), והיא תהיה 0 אם במחלקה זו יש מספר זוגי של אחדים.
עבור ספרת בקרה הראשונה: המחלקה היא כל הספרות שלמספר הסידורי שלהם הספרה הימנית היא 1 (כלומר אלה שעומדים במקומות האי-זוגיים).
עבור ספרת בקרה השנייה: המחלקה היא כל הספרות שלמספר הסידורי שלהם הספרה השנייה מימין היא 1.
עבור ספרת בקרה ה-$\mathrm{K}+1$, כאשר $\mathrm{K} = 2,3,\dots,11$: המחלקה היא כל הספרות שלמספר הסידורי שלהם הספרה הימנית ביותר היא 1, וגם הספרה ה-K מימין היא 1.
לגבי ספרת ביקורת (האחרונה): בילבו ייקח ספרות בקרה עם מספר סידורי אי-זוגי, כלומר 1, 3, 5, ... , 11 ויספור כמה אחדים יש בין הספרות הללו. אם יתקבל מספר זוגי של אחדים, הוא ירשום 0, ואם מספר אי-זוגי, ירשום 1.
תיארנו באופן מלא מה בילבו עושה, כעת נתאר איך גנדלף יכול לגלות את הספרות לפי הרשימה.
דבר ראשון שגנדלף יעשה זה לחשב את 12 ספרות הבקרה ואת ספרת הביקורת האחרונה מחדש לפי אותה שיטה, ולבדוק האם יצא אותו הדבר.

נחשוב איזה נזק ניצן היה יכול לעשות, ואיך זה היה יכול להשפיע. אם הוא יחליף שתי ספרות סמוכות זהות, אז זה כמו לא לעשות כלום. בנוסף, יתכן שהוא החליף שתי ספרות שונות שנמצאות זו ליד זו. אם נראה שאחד האפסים של הפרדה הפך ל-1, אז או שנדע שה-2022 הספרות הראשונות לא השתנו כלל, או שנדע איך הן השתנו בדיוק, ואז גנדלף ידע שמה שרשום בהן נותן לו בדיוק את המספר שניצן בחר.

אם ניצן החליף בין שתי ספרות בקרה סמוכות בצורה ששינתה אותן, אז גנדלף יראה חוסר התאמה בין 12 ספרות הבקרה לבין ספרת הביקורת האחרונה, ואז הוא ידע שניצן לא שינה את ה-2022 ספרות הראשונות כי לניצן מותר לעשות החלפה אחת בלבד. אז הוא יוכל לגלות את המספר בשיטה הרגילה.

המקרה האחרון והמעניין זה המקרה שניצן החליף בין 0 ל-1 שהן ספרות סמוכות מבין 2022 ספרות ההתחלתיות. במקרה זה גנדלף יוכל להבין שספרות הבקרה הועברו נכון לפי ספרת הביקורת האחרונה. לפי ספרת הבקרה הראשונה, גנדלף יוכל לראות שאנחנו במקרה הזה, כי הזוגיות בתוך הספרות במקומות האי-זוגיים השתנתה. מה שהוא צריך להבין לפי ספרות הבקרה זה מה הוא בדיוק השינוי שניצן עשה; אם הוא מצליח להבין זאת, הוא יוכל לנטרל אותו ולתקן ולגלות את המספר.

לפי ספרות הבקרה 3, 4, ... , 12 הוא יוכל לדעת איזו ספרה במקום האי-זוגי השתנתה, כי הוא יודע בדיוק את הרישום הבינארי של המספר הסידורי של הספרה הזאת.

כעת נשאר להבין, האם הספרה הזו הוחלפה עם הספרה משמאלה או עם הספרה מימינה.

בזה נוכל להיעזר בספרת הבקרה השנייה. אם נצבע בשחור את הספרות שהן במחלקה שלפיה מחשבים את מספר הבקרה השנייה ונצבע בלבן את הספרות האחרות, נקבל סדרה

... שחור שחור לבן לבן שחור שחור לבן לבן ...

אז לכל ספרה יש ספרה סמוכה באותו צבע וספרה סמוכה בצבע שונה. לכן אם הספרה שבה החלפנו את הספרה שלנו נמצאת מצד אחד, אז הזוגיות של ספרת הבקרה השנייה תשתנה. לפי זה גנדלף ידע לא רק אחת מהספרות שהשתנו אלה גם את השנייה, ואז הוא יוכל להבין בדיוק מה ניצן שינה ברישום הבינארי של המספר.

שיטה שנייה. בילבו מסתכל על המספר של ניצן בבסיס בינארי ואז מחלק את הספרות שלו לשתי קבוצות – קבוצה א׳ שבה 1006 ספרות וקבוצה ב׳ שבה 1016 ספרות.

לקבוצה א׳ בילבו מוסיף 10 ספרות נוספות בצורה שתאפשר לתקן טעות בספרה יחידה – הוא לוקח 1016 מקומות, את המקומות שהאינדקסים שלהן הם חזקות 2 הוא משאיר בהתחלה ריקים, ובשאר המקומות הוא שם את הספרות של קבוצה א׳ המקורית. נשים שיש 10 חזקות של 2 עד 1016 ולכן באמת נשארו 1006 מקומות לשים בהם את הספרות של קבוצה א׳. כעת, בכל ספרה שהיא חזקת 2 הוא שם 1 אם יש מספר אי זוגי של ספרות אחרות שהערך שלהן הוא 1 ובמיקום שלהן הביט שלה דלוק ו־0 אחרת. כך לדוגמא, אם הספרות הן 1001, בילבו ישאיר בהתחלה 3 מקומות ריקים במקומות 1, 2 ו־4, כך שיתקבל 1 0 0 _ 1 _ _. כעת, מבין הספרות במיקומים האי זוגיים הספרה של 3 ושל 7 הן 1, כלומר אלה 2 ספרות שזה מספר זוגי ולכן נשים 0 בספרה במקום 1. אלה גם הספרות שדלוקות מבין 3, 6 ו־7, ולכן גם בספרה במקום 2 נשים 1. לבסוף, מבין הספרות במקומות 5, 6 ו־7, רק בספרה שבמקום 7 יש 1, זאת ספרה 1 ולכן נשים 1 במקום 4. בסוף נקבל את המחרוזת 0 0 1 1 0 0 1. (התהליך שתואר בפסקה הזאת נקרא בדרך כלל "קוד המינג".)

בקבוצה ב׳ בילבו ייקח את כל הספרות במקומות האי זוגיים וירשום את זוגיות מספר האחדים בהם בסוף הסדרה, שהוא גם מקום אי זוגי.

כעת, בילבו ירשום על הלוח את הספרות משתי הקבוצות לסירוגין – באבאבא...באב. כל חילוף בין שתי ספרות סמוכות עם ערכים שונים בהכרח ישנה ספרה אחת מקבוצה א׳ וגנדלף יוכל לגלות בדיוק באיזו ספרה הוא – אם יש מספר זוגי של אחדות במקומות אי זוגיים בקבוצה א׳ אזי גנדלף ידע בוודאות שהשינוי היה לספרה במקום אי זוגי, אחרת הוא ידע בוודאות שהספרה היא במקום זוגי. באופן דומה הוא יוכל לדעת כל ביט בייצוג הבינארי של מיקום הספרה שהשתנתה מקבוצה א׳, ולכן לדעת מהי הספרה הזאת. כעת, יש לידה שתי ספרות מקבוצה ב׳, אחת במיקום אי זוגי ואחת במיקום זוגי. אם הספרה הוחלפה עם ספרה במיקום זוגי כל הספרות במיקומים האי זוגיים יישארו אותו הדבר ולכן יישאר בהן מספר זוגי של אחדים, לעומת זאת אם היא הוחלפה עם ספרה במיקום אי זוגי הספרה הזאת תשתנה ולכן יהיה מספר אי זוגי של אחדות במקומות אי זוגיים. כך גנדלף יוכל לדעת האם הספרה הוחלפה עם הספרה שנמצאת בקבוצה ב׳ במקום זוגי או אי זוגי ולכן יוכל לשחזר את המספר המקורי שבילבו כתב על הלוח ולכן גם את המספר שניצן בחר. מספר הספרות הדרושות הוא $1016 + 1016 + 1 = 2033 < 2040$.

כעת נסביר למה לא יתכן שהקסם יעבוד עבור 2030.

נניח שקיימת שיטה כזאת. כלומר בילבו צריך להיות מסוגל לכתוב 2^{2022} רשימות שונות של 2030 אפסים ואחדים, וגנדלף יוכל לדעת מה הסדרה שבילבו כתב גם אם ניצן יעשה את השינוי שלו.

לכל רשימה באורך 2030 של אפסים ואחדים נגיד שרשימות סמוכות הן הרשימה עצמה, והרשימות שמתקבלות ממנה על ידי החלפה של שתי ספרות סמוכות.

אז בעצם הדרישה היא שיהיה אוסף של 2^{2022} רשימות ספציפיות כך שהרשימות הסמוכות למילים שונות ברושם לא יהיו אותו דבר. במקרה זה בילבו יכול לקודד את 2^{2022} האופציות למספרים שניצן בוחר על ידי מילים שונות מהאוסף, וגם לאחר שינוי נוסף של ניצן, גנדלף יוכל להבין מאיזו מילה זה הגיע. כמובן זה גם שקול לשאלה, אז אם לא ניתן, לבחור 2^{2022} רשימות כאלו באורך 2030, אז הקסם לא מתאפשר.

כל רשימה של 2030 אפסים ואחדים ניתן לאפיין בצורה הבאה: הספרה הראשונה, ובנוסף 2029 אמירות על האם ספרה נוכחית שווה או שונה מהספרה הקודמת. כמות הרשימות הסמוכות לרשימה ספציפית חוץ מעצמה, זה כמות הפעמים שנתקלים ברשימה הזאת בספרה שהיא שונה מהספרה הקודמת.

כמות הרשימות שבהן יש לא יותר מאשר 530 רשימות סמוכות כולל הרשימה עצמה היא

$$2 \cdot \left(\binom{2029}{0} + \binom{2029}{1} + \binom{2029}{2} + \binom{2029}{3} + \ldots + \binom{2029}{529} \right)$$

(אנו יכולים לבחור ספרה ראשונה באופן אקראי, ולאחר מכן לבחור עד 529 מקומות בהם מחליפים סימן). אנחנו נוכיח שמספר זה אינו מאוד גדול. בסכום שרשמנו כל מחובר גדול מהקודם. אבל גם לגבי המחובר האחרון:

$$\binom{2029}{529}\cdot 2^{100} < \frac{2029}{1}\cdot\frac{2028}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{1501}{529}\cdot\frac{1500}{530}\cdot\ldots\cdot\frac{1401}{629} =$$

$$= \frac{2029}{1}\cdot\frac{2028}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{1401}{629} = \binom{2029}{629}$$

לכל $k < 529$ ניתן לרשום

עכשיו בסכום

$$2^{2029} = \binom{2029}{0}+\binom{2029}{1}+\binom{2029}{2}+\binom{2029}{3}+\ldots+\binom{2029}{2029} >$$

$$> \binom{2029}{629}+\binom{2029}{630}+\binom{2029}{631}+\binom{2029}{632}+\ldots+\binom{2029}{1329} > 700\cdot\binom{2029}{629} >$$

$$> 2^{100}\left(\binom{2029}{0}+\binom{2029}{1}+\binom{2029}{2}+\binom{2029}{3}+\ldots+\binom{2029}{529}\right)$$

לכן מספר הרשימות עם פחות מ-530 רשימות סמוכות קטן יותר מ- $2^{1930} = \frac{2\cdot 2^{2029}}{2^{100}}$.

כלומר מבין האוסף של רשימות שבילבו מסוגל לרשום יש פחות מ- 2^{1930} רשימות עם מעט רשימות סמוכות (כי סה"כ יש מעט כאלה), ויתר הרשימות יש להם מעל 2^9 רשימות סמוכות. אם ניקח את כל הרשימות באוסף של בילבו יחד אם כל הרשימות הסמוכות להן נקבל לפחות $2^{1930}+\left(2^{2022}-2^{1993}\right)\cdot 2^9$ אבל מצד שני לא יכול להיות יותר מ- 2^{2030} כאלה, כי כל המילים הסמוכות למילים מהאוסף צריכות להיות שונות. כלומר בשביל שהקסם יתאפשר צריך להתקיים:

$$2^{1930}+\left(2^{2022}-2^{1993}\right)\cdot 2^9 < 2^{2030}$$

$$2^{1930}+2^{2031}-2^{2002} < 2^{2030}$$

$$2^{2030} = 2^{2031}-2^{2030} < 2^{1930}+2^{2031}-2^{2030} < 2^{2002}$$

וזה לא נכון.