מכון ויצמן למדע
WEIZMANN INSTITUTE OF SCIENCE

פתרונות האולימפיאדה הארצית על שם פרופ' גיליס, תש"ף

1. נתונים שבעה מטבעות זהים למראה, ארבעה מתוכם אמתיים ושלושה מזויפים. שלושת המטבעות המזויפים זהים במשקליהם וכן ארבעת המטבעות האמיתיים זהים במשקליהם. ידוע כי מטבע מזויף הוא קל יותר ממטבע אמיתי. בשקילה אחת ניתן לבחור בשתי קבוצות של מטבעות ולבדוק מי מהן קלה יותר, או אם משקליהן זהים. כמה שקילות נחוצות על מנת לאתר מטבע מזויף אחד לפחות.

תשובה: שתי שקילות.

פתרון ראשון: נראה אסטרטגיה לאתר מטבע מזויף בשתי שקילות.

נשים לב כי אם בשקילה מסוימת נקבל שוויון נדע כי כמות המטבעות המזויפים שבחרנו בשקילה זו חייבת להיות זוגית.

בשקילה הראשונה נבחר שתי קבוצות בגודל של שלושה מטבעות כל אחת. במידה ונקבל שוויון נדע שהמטבע שלא בחרנו מזויף מכיוון שמבין המטבעות שבחרנו יש כמות זוגית של מטבעות מזויפים וסך הכל יש כמות אי-זוגית.

אחרת נבחר שני מטבעות מהקבוצה הקלה יותר ונשווה אותם זה מול זה. במידה ולא יתקבל שוויון נדע כי המטבע הקל יותר מזויף, אחרת נדע כי שני המטבעות שבחרנו מזויפים כיוון שאם שניהם אמיתיים אז המטבע השלישי מהקבוצה הקלה חייב להיות מזויף אבל אז בקבוצה השנייה שבחרנו בשקילה הראשונה אסור שיהיו מטבעות מזויפים ולכן מבין המטבעות שלא בחרנו בשקילה הראשונה צריכים להיות שניים מזויפים אבל יש רק מטבע אחד.

נסביר מדוע לא ניתן לאתר מטבע מזויף בשקילה אחת בלבד.

במידה ובשקילה שלנו בשתי הקבוצות יהיו פחות משלושה מטבעות אז במקרה של שוויון נדע שמבין המטבעות שלא בחרנו יש מטבע מזויף אך לא נדע מי מביניהם הוא המזויף.

ואם בשקילה שלנו בשתי הקבוצות יהיו שלושה מטבעות אז במידה ויתקבל אי-שוויון יתכן שבקבוצה הקלה יותר היו רק שני מטבעות מזויפים, ואז לא נדע להגיד מי מבין השלושה מזויף.

פתרון שני: נראה אסטרטגיה אחרת לאתר מטבע מזויף בשתי שקילות.

בשקילה הראשונה נבחר שתי קבוצות בגודל שני מטבעות כל אחת. אם יתקבל אי-שוויון נשווה את שני המטבעות מהקבוצה הקלה יותר זה מול זה, במידה ויתקבל שוויון נדע כי שניהם מזויפים ובמידה ויתקבל אי-שוויון נדע כי המטבע הקל יותר הוא המזויף.

אם בשקילה הראשונה יתקבל שוויון, נבחר שניים מבין המטבעות שלא בחרנו בשקילה הראשונה ונשקול אותם זה מול זה. במידה ויתקבל באי-שוויון נדע כי המטבע הקל יותר הוא המזויף ובמידה ויתקבל שוויון נדע שהמטבע שעוד לא שקלנו מזויף מכיוון שבשתי השקילות היה שוויון, כלומר עד כה שקלנו כמות זוגית של מטבעות מזויפים וסך הכל יש כמות אי-זוגית.

2. לכנס מתמטי הגיעו 202 אנשים משלוש מדינות: ישראל, יוון ויפן.
ביום הראשון, כל זוג אנשים מאותה מדינה לחצו יד. ביום השני, כל זוג אנשים שאחד מהם ישראלי והשני אינו ישראלי לחצו יד. ביום השלישי, כל זוג אנשים שאחד מהם ישראלי והשני יווני לחצו יד. סך הכול, התרחשו 20200 לחיצות ידיים. כמה ישראלים היו בכנס?

פתרון. אם כל אחד היה לוחץ יד פעם אחת בדיוק לכל אדם אחר, היינו מקבלים

$20301 = 101 \cdot 201 = \frac{202 \cdot 201}{2}$ לחיצות ידיים.

זה לא בדיוק מה שקרה: כל ישראלי ויווני לחצו יד פעמיים בסה"כ, והיפנים לא לחצו את הידיים ליוונים.
נסמן: את כמות הישראלים ב- I, היוונים ב- G, והיפנים ב- J. אז בעצם ההבדל בין מצב שבו כל אחד היה לוחץ יד לכל אחד פעם אחת בדיוק למצב שהיה בפועל הוא מצד אחד $20301 - 20200 = 101$ אבל מצד שני זה $J \cdot G - I \cdot G$.

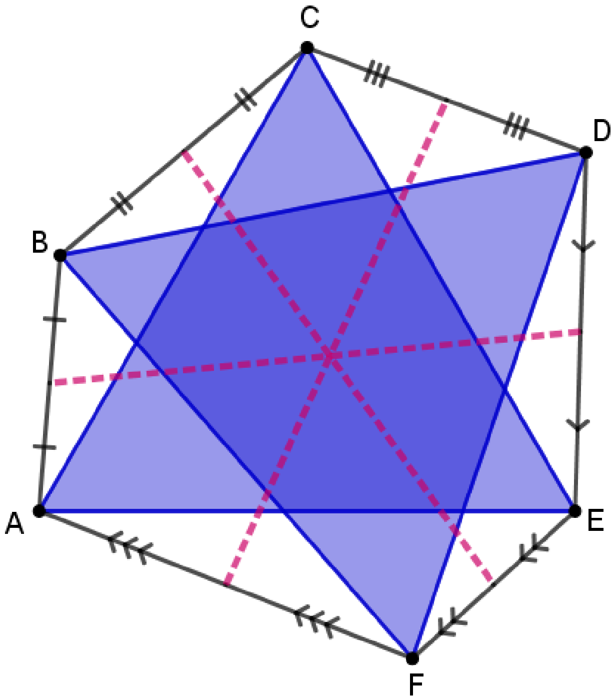
ובכן $(J - I) \cdot G = 101$. אבל 101 הוא מספר ראשוני, לכן $J - I$ ו-G שווים ל-1 ו-101 אך לא ברור באיזה סדר.

לכן $J - I + G = 101 + 1 = 102$.

אבל מהנתון $J + I + G = 202$.

נחסיר את המשוואה הראשונה מהשנייה ונקבל $2I = 100$. לכן $I = 50$.

הערה. אם היו מבקשים למצוא את כמות היפנים או היוונים, היינו מקבלים 2 תשובות אפשריות, תלוי איזה גורם הוא 101 ואיזה 1.



3. במשושה קמור ABCDEF המשולשים ACE ו-BDF משוכללים וחופפים. הראו כי שלושת הקטעים המחברים את אמצעי הצלעות הנגדיות של המשושה נחתכים בנקודה אחת.

פתרון ראשון. ניתן להזיז את המשולש ACE בווקטור v כך שמרכזו יתלכד עם המרכז של BDF. זה יזיז את אמצעו של כל קטע שמחבר את A, C או E לאחד מבין הקודקודים B, D או F בווקטור $\frac{v}{2}$. לכן כל הקטעים האמצעים יוזזו באותה צורה, ואם נוכיח שהם עדיין נפגשים בנקודה אחת נדע שהם נפגשו גם קודם.

כעת כל הקודקודים של כל המשולשים נמצאים במרחק שווה מ-O – המרכז המשותף של שני המשולשים. לכן BCFE הוא טרפשו"ש – הרי BF = CE, ולכן O נמצא על האנך האמצעי של BC שהוא גם האנך האמצעי של EF, כלומר על הקטע שמחבר את האמצע של BC לאמצע של EF. אותו דבר נכון לגבי שני הקטעים האחרים שמחברים אמצעים של צלעות הנגדיות, כולם עוברים דרך O.

פתרון שני. קיימת סימטריה של המישור שמעתיקה משולש אחד על המשולש השני. סמטריה זו היא מהצורה הזזה לאורך ישר ושיקוף ביחס לאותו. נניח ש A יעבור ל-F, C ל-D, ואז E יעבור ל-B.

אמצעים של הקטעים AF, CD, ו-BE נמצאים על ציר השיקוף, לכן הם על ישר אחד. מרכז המסה של 6 קודקודי המשושה הוא גם מרכז מסה של 3 נקודות האמצע של AF, CD ו-EF ולכן הוא גם על הישר. לכן מרכז המסה של קודקודי המשושה נמצא על הישר שמחבר אמצעי שתי צלעות נגדיות. זה נכון לכל זוג צלעות נגדיות, לכן 3 הישרים נפגשים בנקודה.

הערה. ניתן גם להראות כי 3 קטעים אמצעים אלה שווים ויוצרים זוויות של 60°.

4. בתחילת היום, על הלוח רשומים 4 מספרים שלמים (a_0, b_0, c_0, d_0). בכל דקה, דני מחליף את ארבעת המספרים שעל הלוח ברביעיית מספרים חדשה לפי הכלל הבא. אם המספרים הרשומים על הלוח הם (a, b, c, d), ראשית דני מייצר את המספרים

$$a^{'} = a + 4b + 16c + 64d$$

$$b^{'} = b + 4c + 16d + 64a$$

$$c^{'} = c + 4d + 16a + 64b$$

$$d^{'} = d + 4a + 16b + 64c$$

ולאחר מכן הוא מוחק את המספרים (a, b, c, d) ורושם במקומם את המספרים $(a^{'}d^{'}, d^{'}c^{'}, c^{'}b^{'}, b'a')$.

לאילו רביעיות התחלתיות (a_0, b_0, c_0, d_0) ירשום דני בסופו של דבר רביעיית מספרים שכולם מתחלקים ב- 5780^{5780}?

תשובה: דני ירשום רביעייה כזו בסופו של דבר אם ורק אם אחד המספרים ברביעייה ההתחלתית זוגי.

פתרון: ראשית, נשים לב כי אם ברגע מסוים המספרים שעל הלוח מתחלקים כולם במספר כלשהו n אז בדקה שאחריו הכולם מתחלקים ב-n^2. לכן השאלה שקולה לשאלה עבור אילו רביעיות התחלתיות, דני ירשום מתישהו רביעיה שכל איבריה מתחלקים ב-p לכל מחלק ראשוני p של $5780 = 4 \cdot 5 \cdot 17^2$. במלים אחרות, מספיק לבדוק לאילו רביעיות התחלתיות, דני ירשום ברגע כלשהו רביעייה שכל איבריה מתחלקים ב-2, ברגע נוסף רביעייה שמתחלקת כולה ב-5 וברגע נוסף רביעייה שמתחלקת כולה ב-17.

מכיוון והמספרים a', b', c' ו-d' בעלי אותה זוגיות כמו a, b, c ו-d בהתאמה, אם הרביעייה ההתחלתית הייתה כולה אי זוגית, אז לאורך כל התהליך דני ירשום רק רביעיות שכולן אי-זוגיות ולכן לעולם לא ירשום רביעייה כנדרש בשאלה. כלומר, דני לעולם לא יצליח אם הרביעייה ההתחלתית היא כולה אי זוגית. מצד שני, אם ברביעייה ההתחלתית יש מספר זוגי, ע"י סיבוב הרביעייה ההתחלתית ניתן להניח כי זהו a_0. במקרה זה, ברביעייה הבאה שירשום דני האיברים הראשון והרביעי יהיו זוגיים. לאחר דקה נוספת המספרים הראשון הרביעי והשלישי יהיו זוגיים, ובדקה שאחריה כבר כולם יהיו זוגיים. כלומר, אם יש מספר זוגי ברביעייה ההתחלתית, אז לאחר 3 דקות כל הרביעייה זוגית.

נעבור למחלק 5. מכיוון ו-$4 \equiv -1 \; mod \; 5$ אז $a' \equiv -b' \equiv c' \equiv -d^{'} (mod 5)$. מכך נובע כי לאחר דקה אחת, רביעיית המספרים שעל הלוח היא מהצורה $(-a'^2, -a'^2, -a'^2, -a'^2)$ מודולו 5, כלומר כל איבריה שווים מודולו 5. אם נסמן ב-X את הערך הקבוע ברביעייה זו, אז בצעד הבא נקבל

$$a^{'} \equiv b^{'} \equiv c^{'} \equiv d' \equiv X - X + X - X \equiv 0 \; mod \; 5$$

ולכן בדקה שלאחר מכן כל הרביעייה תתחלק ב-5.

נותר לבדוק את הראשוני 17. מתקיים $4^4 = 16^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \; mod \; 17$. מכך נובע שבכל דקה מתקיים $4d' \equiv c', 4c' \equiv b', 4b' \equiv a', 4a' \equiv d'$ מודולו 17. לאחר הדקה הראשונה, קיבלנו שהרביעייה תהיה מהצורה $(4^3 d^{'2}, 4d^{'2}, 4^3 d^{'2}, 4d^{'2})$ מודולו 17. אם נסמן $X = 4d'^2$ נקבל כי לאחר דקה אחת הרביעייה על הלוח תהיה מהצורה $(4^2X, X, 4^2X, X)$. בדקה שלאחר מכן נקבל

$$a' \equiv 4^2X + 4X + 4^4X + 4^3X \equiv X(1 + 4 + 4^2 + 4^3) \; mod \; 17$$

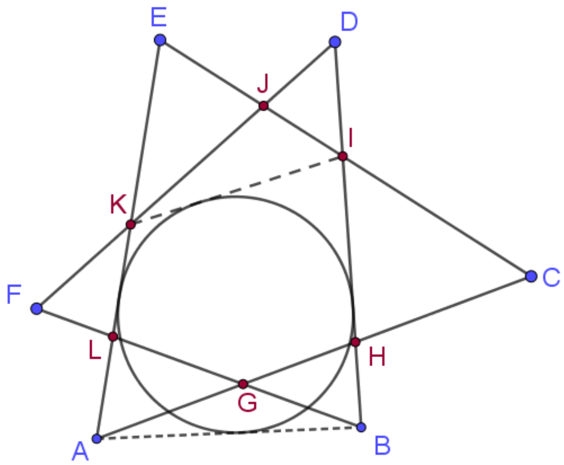
מכיוון ש- $4^4 \equiv 1 \ mod\ 17$.

אבל ש-$(1 + 4 + 4^2 + 4^3) \equiv 5(1 + 16) \equiv 0 \ mod\ 17$

ולכן גם $a' \equiv 0 \ mod\ 17$. מכיוון ו- c', b' ו-d' הם כפולות שלו מודולו 17 הם מתאפסים גם, ולכן בדקה שלאחר מכן כל הרביעייה תתחלק ב-17.

לסיכום, האילוץ היחיד הוא שיש מספר זוגי ברביעייה ההתחלתית.

5. נתונים 2 משולשים ACE, BDF שנחתכים ב-6 נקודות: G,H,I,J,K,L כמתואר בציור. נתון כי חסומים מעגלים במרובעים: ABIK, BCJL, CDKG, DELH, EFGI. האם יתכן שחסום מעגל גם במרובע FAHJ?



פתרון. המרובע FAHJ לא חוסם מעגל. נשים לב שנוכל להיפטר מהנתונים של המעגלים ולהפוך זאת למשוואות של צלעות. נניח בשלילה שגם המרובע FAHJ חוסם מעגל ונכתוב את כל המשוואות:

$$AB + IK = AK + IB$$

$$BC + JL = BL + CJ$$

$$CD + GK = CG + DK$$

$$DE + LH = DH + EL$$

$$EF + GI = EI + FG$$

$$FA + HJ = FJ + AH$$

כעת, נסכום את כל המשוואות ונקבל באגף שמאל את היקף המשושה החיצוני (ABCDEF) + היקפי המשולשים GIK, HJL. באגף ימין נקבל את ההיקף של המשושה הפנימי (GHIJKL) + היקפי המשולשים ACE, BDF.

נרצה להראות שהצד השמאלי במשוואה תמיד גדול מהצד הימני.

טענה: במרובע קמור, סכום האלכסונים תמיד גדול מסכום כל זוג צלעות נגדיות.
הוכחה: נסמן את המרובע XYZW ומפגש האלכסונים XZ,YW ב-P. אז מאי-שוויון המשולש: PX+PY>XY, PZ+PW>ZW. כשנסכום אותם נקבל: XZ+YW>XY+ZW וזה מה שרצינו להוכיח.

כעת, נשתמש בטענה עבור המרובעים: ABHL, BCIG, CDJH, DEKI, EFLJ, FAGK, ונקבל

$$AB + HL < AH + BL$$

$$BC + IG < BI + CG$$

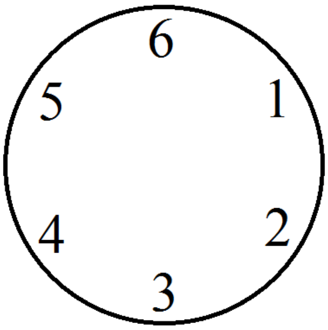
$$CD + JH < CJ + DH$$

$$DE + KI < DK + EI$$

$$EF + LJ < EL + FJ$$

$$FA + GK < FG + AK$$

אם נסכום, נקבל שהאגף הימני קטן מהשמאלי וזה בדיוק מה שרצינו להוכיח.



6. במעגל רשומים המספרים 1 עד 6 לפי הסדר, כמתואר בציור. בכל מהלך, ליאור בוחר מספר כלשהו a במעגל ששכניו b, c ורושם במקומו את המספר $\frac{bc}{a}$. האם ליאור יכול להגיע למצב שבו מכפלת המספרים במעגל גדולה מ- 10^{100}
(א) ב- 100 מהלכים.
(ב) ב- 110 מהלכים.

פתרון. אם נחשב מנה של כל מספר במעגל לאחר חלוקה במספר הסמוך אליו נגד כיוון השעון, נקבל את המספרים $\frac{1}{6}, \frac{6}{5}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 2$.

נסתכל מה יכול לקרות למספרים אלה כאשר מבצעים מהלך כמתואר. אם היו מספרים $q_1 = \frac{b}{a}$ ו- $q_2 = \frac{c}{b}$, לאחר הפעולה יהיו מספרים

$$q_1' = \frac{ac}{b}\Big/ a = \frac{c}{b} \quad \text{-ו} \quad q_2' = c\Big/\frac{ac}{b} = \frac{b}{a},$$

כלומר אותם שני מספרים בסדר הפוך.

במילים אחרות, אם נרשום על מעגל אחר מנות של מספרים, אז במעגל האחר נראה את התהליך הבא: כל פעם מחליפים בין שני מספרים סמוכים.

נבדוק פי כמה משתנה מכפלת כל המספרים במעגל במונחים של מנות. כאשר החלפנו את b ב- $\frac{ac}{b}$ וזה המספר היחיד שמוחלף, אז המכפלה משתנה פי $\frac{a \cdot c}{b \cdot b} = \frac{q_2}{q_1}$. כלומר כשמסתכלים במעגל הנוסף שבו רשומות המנות, ורוצים שהמכפלה תגדל כמה שאפשר, אז בגדול תמיד נרצה שמנה קטנה תעקוף את המנה בתנועה עם כיוון השעון, ושהיחס בין המנה הגדולה לקטנה יהיה גדול ככל האפשר.

היחס הכי גדול בין שני מספרים מבין $\frac{1}{6}, \frac{6}{5}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 2$ הוא $2\Big/\frac{1}{6} = 12$, השני בגודלו הוא $\frac{3}{2}\Big/\frac{1}{6}$, השלישי הוא $\frac{4}{3}\Big/\frac{1}{6}$, הרביעי $\frac{5}{4}\Big/\frac{1}{6}$, והחמישי בגודלו הוא $\frac{6}{5}\Big/\frac{1}{6}$: כל המספרים האלה גדולים מ-6. אכן, היחסים בין כל שני מספרים שלא מערב את $\frac{1}{6}$ קטנים מ-2. לכן נרצה שבכמה שיותר פעולות המספר $\frac{1}{6}$ יעקוף עם כיוון השעון את אחד המספרים: הכי טוב את 2, אבל כשאי-אפשר את $\frac{3}{2}$, וכשגם זה לא מתאפשר את $\frac{4}{3}$, וכך הלאה.

אפשר שכבר במהלך הראשון $\frac{1}{6}$ יעקוף את 2, אבל דבר זה לא יכול לקרות בכל מהלך; אחרי ש- $\frac{1}{6}$ עקף את 2 צריך לעשות לפחות 5 מהלכים של לקדם את $\frac{1}{6}$ או למשוך אחורה את 2 לפני שזה קורה שוב (אלה אם כן מחליפים אותם בחזרה, ש-2 יעקוף את $\frac{1}{6}$ ואז שוב, אבל אז בעצם שני מהלכים אלה ינטרלו זה את זה). לכן אם רוצים לעשות כמה שיותר מהלכים שבהם $\frac{1}{6}$ עוקף את 2, אז במקרה הטוב זה יכול לקרות במהלך הראשון, השישי, האחד עשר וכו. את זה אכן ניתן לבצע, למשל אם בכל מהלך מקדמים את $\frac{1}{6}$ קדימה.

המהלך השני שהכי רוצים לעשות זה כאשר $\frac{1}{6}$ עוקף את $\frac{3}{2}$ (כמובן בלי לעשות את המהלך ההפוך של $\frac{3}{2}$ עוקף את $\frac{1}{6}$ שמנטרל אותו). גם בין שני מהלכים מסוג זה חייבים להיות ארבעה מהלכים מסוג אחר, והפעם הראשונה שאפשר לעשות מהלך כזה היא בתור מהלך שני, ושני הדברים האלה גם יקרו אם בכל מהלך מקדמים את $\frac{1}{6}$.

המהלך השלישי שהכי רוצים לעשות כמה שיותר ממנו זה כאשר $\frac{1}{6}$ עוקף את $\frac{4}{3}$, ושוב, זה לא יקרה לפני המהלך השלישי, ובפעם השנייה אם לא מחזירים את זה אחורה אז רק במהלך השמיני, ואז במהלכים שלוש עשרה, שמונה עשרה וכך הלאה.

דבר דומה לגבי ההחלפות כש $\frac{1}{6}$ עוקף את $\frac{5}{4}$, וגם כאשר $\frac{1}{6}$ עוקף את $\frac{6}{5}$. בסופו של דבר השיטה הכי טובה שבה מהלכים שהכי מגדילים את המכפלה מתרחשים כמה שיותר מוקדם וכמה שיותר פעמים, זה כאשר פשוט מקדמים את $\frac{1}{6}$ בכל מהלך.

במקרה זה בכל 5 מהלכים נגדיל את המכפלה פי

$$\left(2\Big/\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\Big/\frac{1}{6}\right)\cdots\left(\frac{6}{5}\Big/\frac{1}{6}\right)=\left(2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\right)\Bigg/\left(\frac{1}{6}\right)^5=6^6$$

בהתחלה המכפלה היא $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6=720$, ובסוף השאיפה היא להגיע ל- 10^{100},

ואנחנו יודעים מהי השיטה היעילה ביותר ומה היא נותנת, אז נשאר רק לחשב.

(א) אם מבצעים 100 מהלכים, בשיטה היעילה ביותר זה 20 חמישיות של מהלכים, ובכל חמישייה של מהלכים מכפילים ב- 6^6, אז השאלה היא מה גדול יותר:

$720\cdot\left(6^6\right)^{20}$ או 10^{100}

נשים לב כי $6^6=216^2<220^2=48400<50000$ ולכן

$$\left(6^6\right)^{20}<\left(5\cdot10^4\right)^{20}=5^{20}\cdot10^{80}$$

אנו נוכיח כי $720\cdot\left(6^6\right)^{20}<10^{100}$. מספיק לבדוק

$$720\cdot\left(6^6\right)^{20}<720\cdot5^{20}\cdot10^{80}\overset{?}{<}10^{100}$$

$$720\cdot5^{20}\overset{?}{<}10^{20}$$

$$720\overset{?}{<}2^{20}$$

וזה ברור הרי אפילו $720<1000<2^{10}$.

(ב) אם עושים 110 מהלכים, בשיטה היעילה ביותר זה 22 חמישיות של מהלכים, ובכל חמישייה של מהלכים מכפילים ב- 6^6, אז השאלה היא מה גדול יותר:

$720\cdot\left(6^6\right)^{22}$ או 10^{100}

נשים לב כי $6^6=216^3>40000$ ולכן

$$\left(6^6\right)^{22}>\left(4\cdot10^4\right)^{22}=4^{22}\cdot10^{88}$$

אבל $4^{22}=2^{44}=2^4\cdot\left(2^{10}\right)^4>16\cdot\left(1000\right)^4=16\cdot10^{12}$. לכן

$$\left(6^6\right)^{22}>\left(4\cdot10^4\right)^{22}>10^{12}\cdot10^{88}=10^{100}$$

7. בתוך משולש נמצאת נקודה P, שמרחקיה מהישרים עליהם נמצאות צלעות המשולש הם d_a, d_b, d_c.
נסמן ב- R את רדיוס המעגל החוסם את המשולש וב- r את רדיוס המעגל החסום במשולש. הראו כי $\sqrt{d_a}+\sqrt{d_b}+\sqrt{d_c}\le\sqrt{2R+5r}$.

פתרון ראשון. נסמן ב- a,b,c את צלעות המשולש, וב- S את שטחו. לפי אי-שוויון קושי-שוורץ

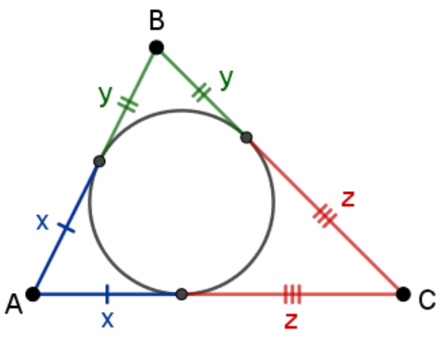
$$\sqrt{d_a}+\sqrt{d_b}+\sqrt{d_c}\le\sqrt{a\cdot d_a+b\cdot d_b+c\cdot d_c}\cdot\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}=\sqrt{2S}\cdot\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$$

הרי $\frac{a\cdot d_a}{2},\frac{b\cdot d_b}{2},\frac{c\cdot d_c}{2}$ הם שטחי משולשים (המתקבלים כאשר מחברים את P לקודקודי המשולש) שאיחודם הוא המשולש הנתון.

לכן מספיק להראות כי $2S\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\le 2R+5r$.

זהו אי-שוויון שכבר לא מדבר על נקודה P אלה על משולש בלבד.

ניתן לתאר כל תכונה של המשולש באמצעות קטעי הצלעות מהקודקודים לנקודות ההשקה עם המעגל החסום. שני הקודקודים ליד כל קודקוד שווים כי אלה שני משיקים מנקודה למעגל; המשיקים מקודקודים A, B ו-C יסומנו x, y ו- z בהתאמה. קל לבטא את חצי ההיקף של המשולש $p=x+y+z$, וגם את הצלעות



$$a=y+z,\quad b=x+z,\quad c=x+y.$$

נוסחת הרון נותנת ביטוי לשטח $S=\sqrt{pxyz}$.

ניתן גם לבטא רדיוסי של המעגל החוסם והחסום: הרי

$S=pr$ ולכן $r=\frac{S}{p}=\sqrt{\frac{xyz}{p}}$, ומצד שני $S=\frac{abc}{4R}$

לכן $R=\frac{abc}{4S}$.

צריכים להראות $2S\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\le 2R+5r$, במילים אחרות

$$2S\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\le\frac{abc}{2S}+5\frac{S}{p}$$

$$4S^2\cdot\frac{ab+bc+ca}{abc}\le abc+10\frac{S^2}{p}$$

$$4xyzp\cdot\frac{\sum_{cyc}(x+y)(x+z)}{(x+y)(x+z)(y+z)}\le(x+y)(x+z)(y+z)+10xyz$$

אבל $\sum_{sym} x^2y+2xyz=(x+y)(x+z)(y+z)$, לכן צריך להוכיח כי

$$4xyzp\cdot\frac{\sum_{cyc}\left(x^2+xy+xz+yz\right)}{\sum_{sym}x^2y+2xyz}\le\sum_{sym}x^2y+12xyz$$

$$4xyz(x+y+z)\cdot\sum_{cyc}\left(x^2+3xy\right)\le\left(\sum_{sym}x^2y+12xyz\right)\left(\sum_{sym}x^2y+2xyz\right)$$

$$4xyz\left(\sum_{cyc}x^3+4\sum_{sym}x^2y+9xyz\right)\le\left(\sum_{sym}x^2y\right)^2+14xyz\cdot\sum_{sym}x^2y+24(xyz)^2$$

$$4xyz\sum_{cyc}x^3+2xyz\sum_{sym}x^2y+12x^2y^2z^2\le\left(\sum_{sym}x^2y\right)^2=$$
$$=\sum_{sym}x^4y^2+2\sum_{cyc}x^3y^3+2\sum_{cyc}x^4yz+2\sum_{cyc}x^3y^2z+6x^2y^2z^2$$

$$2xyz\sum_{cyc}x^3+6x^2y^2z^2\le\sum_{sym}x^4y^2+2\sum_{cyc}x^3y^3$$

אי-שוויון זה כבר קל, הוא מתקבל מסכום של אי-שוויונות מסוג $2x^3y^3\le x^4y^2+x^2y^4$, ואי-שוויון $6x^2y^2z^2\le2\sum_{cyc}x^3y^3$.

האי-שוויון $2x^3y^3\le x^4y^2+x^2y^4$ פשוט: כאשר מעבירים הכל לאגף ימין מקבלים $0\le\left(x^2y-y^2x\right)^2$, וזה ברור.

ולבסוף $6x^2y^2z^2\le2\sum_{cyc}x^3y^3$ מתקבל מאי-שוויון הממוצעים, הרי

$$x^2y^2z^2=\sqrt[3]{\ldots}\le\frac{x^3y^3+x^3z^3+y^3z^3}{3}$$

פתרון שני: בפתרון הראשון ראינו כי מספיק להוכיח את אי-השוויון:

$$2\mathrm{S}\left(\frac{1}{\mathrm{a}}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\le2R+5r$$

שוב נבטא את $2R+5r$ בעזרת x,y,z אבל הפעם בדרך מעט שונה.

נשתמש בנוסחה:

$$4\mathrm{R}+r=r_a+r_b+r_c$$

כאשר r_a,r_b,r_c מסמנים את הרדיוסים של המעגלים החסומים מבחוץ במשולש.

מכאן נובע כי

$$4R+10r=r_a+r_b+r_c+9r=\frac{S}{x}+\frac{S}{y}+\frac{S}{z}+\frac{9S}{x+y+z}$$

ולכן מספיק להוכיח כי:

$$4\mathrm{S}\sum_{cyc}\frac{1}{x+y}\le\frac{9S}{x+y+z}+\sum_{cyc}\frac{S}{x}$$

נחלק ב-S ונכפול ב-$x+y+z$ ונקבל שמספיק להוכיח את אי השוויון:

$$4\sum_{cyc}\frac{x+y+z}{x+y}\le 9+\sum_{cyc}\frac{x+y+z}{x}=12+\sum_{cyc}\frac{y+z}{x}$$

אבל

$$\sum_{cyc}\frac{x+y+z}{x}=3+\sum_{cyc}\frac{y+z}{x}=3+\sum_{cyc}\frac{y}{x}+\frac{z}{x}=3+\sum_{cyc}\frac{y}{x}+\frac{y}{z}\ge$$

$$\ge 3+\sum_{cyc}\frac{(y+y)^2}{x+z}=3+\sum_{cyc}\frac{4y}{x+z}$$

כאשר אי-השוויון נבע מאי-שוויון קושי-שוורץ, קיבלנו שצריך להוכיח ש-

$$4\sum_{cyc}\frac{x+y+z}{x+y}\le 9+3+\sum_{cyc}\frac{4y}{x+z}$$

וזה מיידי.