אולימפיאדת המתמטיקה לנוער ע"ש פרופ' גיליס 1983

1. נתון משולש ששטחו 1 וצלעותיו a, b ו-c. ידוע כי $a \ge b \ge c$. הוכח כי $b \ge \sqrt{2}$.

2. נתונה סדרה חשבונית המורכבת ממספרים שלמים. אחד מאיברי הסדרה הוא חזקה חמישית של מספר שלם. הוכח כי ישנם בסדרה אינסוף איברים בעלי תכונה זו.

3. בית המחוקקים של מדינה מסוימת מורכב מ-r חברים. את עבודת הבית מבצעים בעזרת N ועדות החוקה קבעה כי בכל ועדה יהיו בדיוק 9 חברים וכי כל חבר ישתייך ל-n ועדות בדיוק. מישהו מצא כי עבור כל קבוצה אפשרית של 3 מבין חברי הבית, ישנה בדיוק ועדה אחת אשר לה השתייכו שלושתם.

   א. חשב את N ו-n כפונקציות של r

   ב. הוכח כי r אינו מתחלק ב-7 או ב-4.

4. מצא n טבעי, בעבורו המספר $2^{11} + 2^8 + 2^n$ הוא ריבוע של מספר טבעי.

5. צנחן נחת בתוך יער ששטחו S. צורתו של היער אינה ידועה לו, אך הוא יודע כי השטח הוא S וכי אין בו קרחת. הוכח כי הוא יכול לצאת מהיער כשמרחק הליכתו לא יהיה גדול מ-$2\sqrt{\pi S}$ (בהנחה כי הצנחן מסוגל ללכת לפי המסלול שיקבע).

6. נתון מרובע קמור $ABCD$. הנקודות M, P נמצאות על הצלעות BC, CD בהתאמה, ומתקיים $BM = MC$, $CP = PD$. נתון $AM + AP = a$. הוכח כי $S_{ABCD} < \frac{1}{2}a^2$.

7. מצא עבור אילו a ו-b יהיה למשוואה

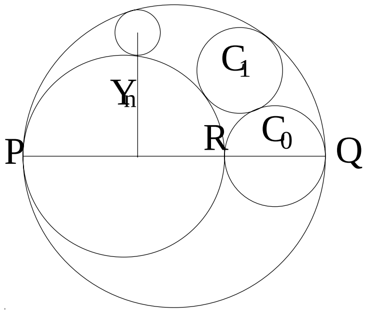
$$\sqrt[3]{(ax+b)^2} + \sqrt[3]{(ax-b)^2} + \sqrt[3]{a^2x^2 - b^2} = \sqrt[3]{b}$$

   פתרון אחד בלבד.

8. חשב את ערכו של הביטוי

$$\sec^2 \frac{\pi}{9} + \sec^2 \frac{5\pi}{9} + \sec^2 \frac{7\pi}{9} .$$

9. נתון קטע PQ ועליו נקודה R. PQ הוא קוטר של מעגל A, PR קוטר של מעגל B ו-RQ קוטר של מעגל C_0 (ראה ציור).



C_1 הוא מעגל המשיק למעגלים A, B ו-C_0. C_2 הוא מעגל המשיק למעגלים A, B ו-C_1 וכו'.
C_n הוא מעגל המשיק למעגלים A, B, C_{n-1}. נסמן ב-r_n את הרדיוס של C_n וב-Y_n את מרחקו של מרכז C_n מהקטע PR. הוכח כי $Y_n = 2nr_n$.