אולימפיאדת המתמטיקה לנוער ע״ש פרופ׳ גיליס 1986

1. הוכח כי עבור m שלם וחיובי וכל α ממשי הפולינום

$$x^{m+1}\cos(m-1)\alpha - x^m\cos m\alpha - x\cos\alpha + 1$$

מתחלק ב-$x^2 - 2x\cos\alpha + 1$.

2. מצא את כל הזוגות של המספרים השלמים (x,y) המקיימים

$$(x-1)\cdot x\cdot(x+1) = y^5.$$

3. הוכח כי לא קיימים מספרים שלמים x, y המקיימים $x^3 - y^3 = 5746$.

4. נתון חצי עיגול שקוטרו AB. מבין כל המצולעים הקמורים בעלי n צלעות, שכל קודקודיהם נמצאים בחצי העיגול, מהו המצולע בעל השטח המירבי? נמק.

5. $\{a_1, a_2, \ldots\}$ מהווים סדרה אינסופית של מספרים ממשיים, כולם שונים זה מזה. הוכח כי ניתן לבחור מסדרה זו סדרה חלקית שהיא אינסופית ומונוטונית.

6. נתונים מספרים ממשיים a, b, c, p, q, r המקיימים

(I) $a < b < c$,

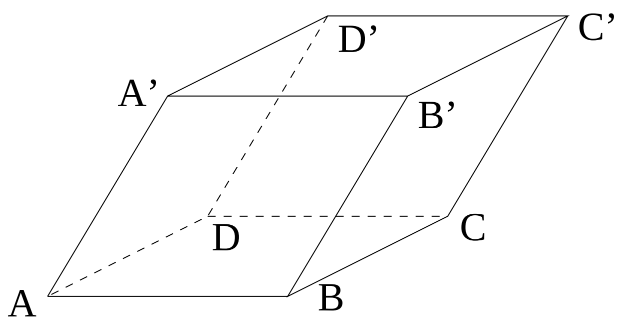
(II) $p > 0$, $q > 0$, $r > 0$.

הוכח כי למשוואה

$$\frac{p}{x-a} + \frac{q}{x-b} + \frac{r}{x-c} = 1$$

יש שלושה פתרונות ממשיים, אשר בדיוק אחד מהם גדול מ-c.

7. $ABCDA'B'C'D'$ הוא מקבילון תלת ממדי (ראה ציור).



דרך C' מעבירים מישור מחוץ למקבילון החותך את הישרים AB, AD, AA' בנקודות P, Q, R בהתאמה.

קבע את P, Q, R על הישרים האלה כך שנפח הפירמידה $APQR$ יהיה קטן ככל האפשר.

8. המערכת a_{ij} מוגדרת עבור $i \geq 0$ וכל j שלם $(-\infty < j < \infty)$ כדלקמן:

(I) $a_{0,0} = 1$,

(II) $a_{0,j} = 0$ עבור $j \neq 0$,

(III) עבור כל $i > 0$ מתקיים $a_{i,j} = 2(a_{i-1,j-1} + a_{i-1,j+1}) - a_{i-1,j}$.

הוכח כי

$$a_{n,0} = (-1)^n \sum_{r=0}^{[n/2]} 2^{2r} \frac{n!}{(n-2r)!\,(r!)^2}\,.$$

9. ידוע כי מספר הפרמוטציות של הקבוצה $\{1, 2, \ldots, n\}$ הוא $n!$. נסמן את הפרמוטציות האלה $\pi_1, \pi_2 \ldots \pi_{n!}$. אם π_k היא הסדרה $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ נגדיר

$$S_k = (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + \cdots + (a_{n-1} - a_n)^2.$$

חשב את הממוצע החשבוני של המספרים S_k, דהיינו

$$\frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n!} S_k.$$