אולימפיאדת המתמטיקה לנוער ע"ש פרופ' גיליס 1989

1. $f(x) = |x-a| + |bx-1|$ כאשר $0 \le a \le 1/2$, $0 \le b \le 1$. הוכח כי ניתן למצוא x_0, x_1 ממשיים כך ש-$x_1 \ge x_0 + 2$ ואילו עבור כל $x_0 \le x \le x_1$ מתקיים $f(x) \le 2$.

2. ℓ_1, ℓ_2 הם ישרים מקבילים המשיקים למעגל C בעל רדיוס R ומרכז X. בונים שני מעגלים נוספים, האחד בעל רדיוס r_1 המשיק למעגל C וגם לישר ℓ_1, השני בעל רדיוס r_2, המשיק לישר ℓ_2 ולשני המעגלים האחרים. מצא את R כפונקציה של r_1, r_2.

3. מצא את כל הזוגות של מספרים שלמים המקיימים $x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y$.

4. נתונה זוית חדה $\angle PQR$ ובפנים לה שתי נקודות שונות A, B. מצא נקודה X על השוק QP של הזוית, כך שאם נמשיך את XA, XB עד שיפגשו את השוק QR ב-Y, Z, בהתאמה, יתקיים $XY = XZ$.

5. המספרים החיוביים $(a_1, a_2, \dots, a_{2m+1})$ מהווים סדרה הנדסית. X הוא הממוצע החשבוני של $(a_1, a_3, \dots, a_{2m+1})$ ו-Y הוא הממוצע החשבוני של $(a_2, a_4, \dots, a_{2m})$. הוכח כי $X \ge Y$. באילו תנאים יתקיים שוויון?

6. $A_1, A_2, \dots, A_n$ הן n קבוצות כלשהן. P קבוצת אותם האיברים השייכים, כל אחד, למספר אי זוגי מבין הקבוצות הנתונות. הוכח כי עבור $s = 1, 2, \dots, n$ המספר

$$S = |P| - \sum_i |A_i| + 2\sum_{\substack{i,j\\ i\ne j}} |A_i \cap A_j| - 2^2 \sum_{\substack{i,j,k\\ i\ne j\ne k\ne i}} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots$$
$$\dots + (-2)^{s-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_s|$$

הוא כפולה שלמה של 2^s (עבור כל הקבוצות $X, Y, \dots$ מסמן $|X|$ מספר איברי X ו-$X \cap Y$ מסמן את החיתוך של X ו-Y).

7. נתונה מערכת משוואות

$$\sin x_1 + \sin x_2 + \sin x_3 + \cdots + \sin x_n = 0,$$
$$\sin x_1 + 2\sin x_2 + 3\sin x_3 + \cdots + n \sin x_n = 100.$$

מהו הערך הקטן ביותר של n עבורו קיימים למערכת זו יהיו פתרונות ממשיים? נמק.