אולימפיאדת המתמטיקה לנוער ע"ש פרופ' גיליס 1991

1. כמה מספרים שלמים בני 5 ספרות שונות (בבסיס 10) קיימים כך שמתקיימים שני התנאים הבאים:

א. הספרה האמצעית בהם היא 5,

ב. ההפרש בין הספרה הראשונה והאחרונה הוא בערכו המוחלט 3.

2. מצא את כל הזוגות (x, y) של מספרים שלמים המקיימים

$$x(5y-7)=y^2+2.$$

3. X היא קבוצה של 6 נקודות כלשהן במישור. D הוא המרחק המירבי בין כל זוג נקודות של X ו-d המרחק המזערי. הוכח כי $D \geq \sqrt{3} \cdot d$. האם יתכן שוויון? אם כן, באילו תנאים?

4. ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 הם שלושה ישרים במישור העוברים דרך נקודה אחת נתונה נקודה A על ℓ_1. הראה איך ניתן למצוא נקודות B על ℓ_2 ו-C על ℓ_3 כך ש-ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 יהיו חוצי הזויות הפנימיות של המשולש ABC.

5. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת עבור כל x רציונלי. נתון כי

(i) $f(1)=3$;

(ii) עבור כל a, b רציונליים

$$f(a+b)+f(a-b)=2[f(a)+f(b)].$$

מצא את $f(x)$.

6. פתור את מערכת המשוואות

$$\frac{3(x^2+1)}{x}=\frac{4(y^2+1)}{y}=\frac{5(z^2+1)}{z}$$

$$yz+xz+xy=1.$$

7. עבור כל שתי נקודות X, Y במישור מגדירים $Z=F_Y(X)$ כדלקמן:

(i) מתקדמים מ-X ל-Y ושם מסתובבים בזוית של 90° נגד כוון מחוגי השעון

(ii) מתקדמים מ-Y בכוון החדש עד שמגיעים ל-Z, כאשר $YZ = XY$.

A, B, C, D הן ארבע נקודות במישור. עבור נקודה P_0 מסוימת נגדיר

$$P_1 = F_A(P_0), \;\; P_2 = F_B(P_1), \;\; P_3 = F_C(P_2), \;\; P_4 = F_D(P_3).$$

נתון כי P_0 ו-P_4 מתלכדות. הוכח כי:

(i) AC מאונך ל-BD ושווה לו.

(ii) עבור כל בחירה אחרת של הנקודה P_0 נקבל כי P_0 ו- P_4 מתלכדות.