אולימפיאדת המתמטיקה לנוער ע"ש פרופ' גיליס 1992

1. הוכח כי אין למצוא x, y חיוביים המקיימים

$$x^{19}y^{92} = 2^{1992}$$
$$19x + 92y = 5752$$

2. הוכח כי אין פוליאדר בעל 7 מקצועות.

3. נתונה מערכת משוואות

$$x_r x_{r+1} = r, \qquad r = 1, 2, \ldots, n-1,$$
$$x_n x_1 = n.$$

א. הוכח כי כאשר n זוגי אין פתרון.

ב. פתור את מערכת המשוואות במקרה ש-n הוא אי זוגי.

4. נתונה קבוצה של $10n$ נקודות במישור, אשר אין שלוש מביניהן הנמצאות על קו ישר. הוכח שניתן לבנות n משושים ו-n מרובעים שקודקודיהם הם הנקודות הנתונות כך שאין שניים מבין $2n$ המצולעים האלה שיש להם נקודה משותפת (על השפה או נקודה פנימית).

5. x, y, z הם מספרים חיוביים. הוכח כי

$$\min(1, x^3, y^4, z^5) \le xyz.$$

6. שעורי הנקודות A, B, C הם $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,0)$ בהתאמה. הנקודה P נמצאת במישור ABC ומקיימת

$$\angle PBC = 2\angle PAC + \pi/2.$$

מצא את המקום הגיאומטרי של P (מצא משוואה, קבע תחום ההגדרה, תן תיאור סכמטי ומצא אסימפטוטות).

7. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ היא סדרה חשבונית של מספרים חיוביים. $b_1, b_2, \ldots, b_n$ היא סדרה הנדסית בעלת אותו מספר איברים ונתון כי $b_1 = a_1$, $b_n = a_n$. הוכח כי

$$\sum_{r=1}^{n} a_r \ge \sum_{r=1}^{n} b_r.$$

באילו תנאים יתקיים שוויון? נמק.