אולימפיאדת המתמטיקה לנוער ע"ש פרופ' גיליס 1998

1. במרחב התלת ממדי נתונים n קטעים $[A_i, B_i]$ שאינם עוברים דרך נקודה O, כך שסכום כל הזויות $A_i\widehat{O}B_i$ קטן מ-180°.

   הוכח כי קיים מישור העובר דרך הנקודה O שאינו חוצה אף אחד מהקטעים האלה.

2. הוכח כי מכפלה מסוימת של המספר 2^{1998} יכולה להכתב באמצעות הספרות 1 ו-2 בלבד (בהצגה עשרונית כמובן).

3. על לוח משבצות מסודרות מטבעות, כך שבכל משבצת או שנמצאת מטבע אחת, או שאין עליה מטבע כלל. סידור כזה נקרא **משעמם** אם ישנן על הלוח ארבע מטבעות היוצרות מלבן בעל צלעות מקבילות לאלה של הלוח.

   א. הוכח כי על גבי לוח שמימדיו $m \times n$ (אורך צלע המשבצת הוא 1) כל סידור של יותר מ-$3mn/4$ מטבעות הוא סידור משעמם.

   ב. הוכח כי על גבי לוח שמימדיו 7×7 כל סידור של 26 מטבעות הוא סידור משעמם.

4. לאיש אחד היה מחזיק נרות בעל שבעה קנים. בערב הראשון הוא הדליק נר אחד ואחרי שעה כיבה אותו. בערב השני הוא הדליק שני נרות ושוב, בדיוק אחרי שעה כיבה את שניהם. הוא המשיך באותו אופן, בהוסיפו כל יום נר אחד, עד שבערב השביעי הוא הדליק את כל שבעת הנרות ואחרי שעה אחת בדיוק כל הנרות נגמרו (כך שהוא לא היה צריך לכבות אותם).

   איך בחר האיש את הנרות שהדליק בכל ערב (בהתחלה כל הנרות היו זהים)?

5. א. מצא שני מספרים ממשיים a, b כך שהערך המוחלט של ההפרש

$$|ax + b - \sqrt{x}|$$

   בקטע $[1,4]$ לא יהיה גדול מ-$1/24$ (כלומר כך שלכל x בקטע $[1,4]$ מתקיים $|ax+b-\sqrt{x}| \le \frac{1}{24}$).

   ב. הוכח כי אי אפשר להחליף את $1/24$ במספר חיובי קטן יותר.

6. בריבוע שאורך צלעו 1 מצוייר קו שבור שאורכו 1001. הוכח כי קיים קו המקביל לאחת מצלעות הריבוע הפוגש את הקו השבור ב-500 נקודות לפחות.