<u>פתרון הבעיות של האולימפיאדה למתמטיקה ע"ש גיליס 2008</u>

1) מצאו את כל הזוגות (a ,b) של מספרים טבעיים, כך שסכום של 4 הערכים:
סכומם של שני המספרים, ערך מוחלט של הפרש, מכפלתם ומנתם שווה ל-2008? נמק/י!

<u>פתרון:</u> אנו מחפשים (a ,b) – טבעיים – כך שיתקיימים: $(a+b)+|a-b|+ab+\frac{a}{b}=2008$.

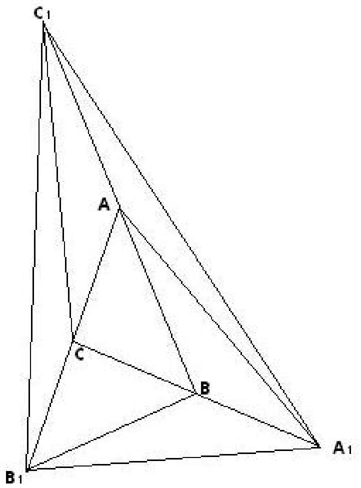
שלושת המחוברים הראשונים הם מספרים שלמים, לכן המנה $\frac{a}{b}$ היא מספר שלם. זאת אומרת, ש- a מתחלק ב-b, ולכן $a>b>0$. מכאן נקבל שקיים k טבעי כך ש-$a=kb$, וגם

$$2008=(a+b)+|a-b|+ab+\frac{a}{b}=a+b+a-b+ab+\frac{a}{b}=2a+ab+\frac{a}{b}=2kb+kb^2+k=k(b+1)^2$$

על כן עלינו לבדוק, באלו ריבועים שלמים מתחלק המספר 2008. נפרק אותו לגורמים ראשוניים: $2008=2^3\cdot 251$ (קל לבדוק ש-251 הוא ראשוני). לכן 2008 מתחלק ב-1 וב-4, ולא מתחלק באף ריבוע שלם אחר. אמרנו ש-b הוא מספר חיובי, לכן לא ייתכן ש- $(b+1)^2=1$. מכאן ש- $(b+1)^2=4$, ו- b=1. לכן $k=\frac{2008}{4}=502$, ו- $a=kb=502$.
לכן הזוג היחיד שמקיים את הדרישות הנ"ל הוא (502,1).

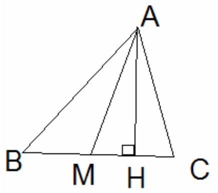
2) על הנייר מצויר משולש ABC. בונים נקודות A_1,B_1,C_1 כך ש- B אמצע של A_1C, A - אמצע של C_1B, C - אמצע של B_1A.
א) מהו היחס בין שטח המשולש ABC לשטח המשולש $A_1B_1C_1$? נמק/י!
ב) כעת מוחקים הכול חוץ מנקודות A_1,B_1,C_1. כיצד ניתן לבנות, בעזרת מחוגה וסרגל, את הנקודות C,B,A המקוריות?

<u>פתרון:</u>
<u>הערה:</u> אנו מכירים לפחות 4 פתרונות שונים לסעיף ב'. נביא כאן רק אחד מהם, אשר מבוסס על התשובה לסעיף א'.
הציור המתאים לבעיה:



א) <u>תשובה:</u> 7:1.

הסבר: אנו טוענים כי כל שבעת המשולשים הקטנים שבציור הם בעלי אותו שטח, כלומר, ששטחי המשולשים $\Delta ABC, \Delta A_1BB_1, \Delta A_1AB, \Delta CBB_1, \Delta B_1CC_1, \Delta ACC_1, \Delta C_1AA_1$ שווים.
כדי להוכיח זאת נשתמש בעובדה הבאה: תיכון במשולש מחלק את המשולש לשני משולשים שווי שטח.
הסבר: נסמן: AM – תיכון במשולש ABC, AH – גובה במשולש ABC (ראה ציור):



נרצה להוכיח ששטח של ABM שווה לשטח של AMC. לשני המשולשים שהתקבלו יש גובה משותף: AH. לכן שטח ABM הוא:

$$S_{ABM} = \frac{1}{2}\cdot AH\cdot BM = \frac{1}{2}\cdot AH\cdot \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\cdot AH\cdot MC = S_{AMC} = \frac{1}{4}\cdot AH\cdot BC = \frac{1}{2}S_{ABC}$$

נחזור לבעיה שלנו. נשים לב כי A_1A – תיכון במשולש A_1BC_1, B_1B – תיכון במשולש B_1CA_1, C_1C – תיכון במשולש $C_1A B_1$, וגם: BC – תיכון במשולש BB_1A, CA – תיכון במשולש CC_1B, AB - תיכון במשולש AA_1C. מכאן נקבל, ישירות, כי שטחי המשולשים $\Delta ABC, \Delta A_1BB_1, \Delta A_1AB, \Delta CBB_1, \Delta B_1CC_1, \Delta ACC_1, \Delta C_1AA_1$ שווים.
סכום שטחי המשולשים הללו הוא שטח המשולש $\Delta A_1B_1C_1$, לכן שטח של כל אחד משבעת המשולשים הנ״ל הוא $\frac{1}{7}$ משטח המשולש $\Delta A_1B_1C_1$. מכאן שהיחס בין שטחי המשולשים ABC ו-$A_1B_1C_1$ הוא 7:1.

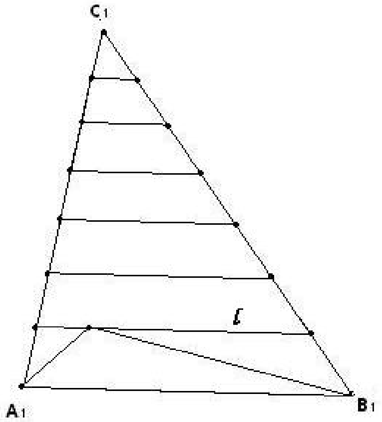
ב) נשתמש בתוצאה של סעיף א׳: שטח המשולש ΔA_1B_1B הוא $\frac{1}{7}$ משטח המשולש $\Delta A_1B_1C_1$.
שטח המשולש ΔA_1BC_1 הוא $\frac{2}{7}$ משטח המשולש $\Delta A_1B_1C_1$ (כי $S_{A_1BC_1} = S_{A_1AC_1} + S_{A_1A\ B} = \frac{1}{7}S_{A_1B_1C_1} + \frac{1}{7}S_{A_1B_1C_1} = \frac{2}{7}S_{A_1B_1C_1}$).

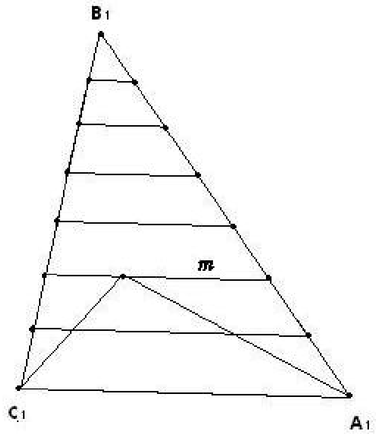
למשולשים ΔA_1B_1B ו- $\Delta A_1B_1C_1$ יש צלע משותף (A_1B_1), וכך גם למשולשים ΔA_1BC_1 ו- $\Delta A_1B_1C_1$ (A_1C_1).
נשתמש בעובדה הבאה: המקום הגיאומטרי של כל הנקודות P בתוך משולש XYZ כלשהו אשר מקיימות: $S_{XYP} = \frac{1}{a}S_{XYZ}$ הוא הישר LM, כאשר L – נקודה על קטע XZ אשר מחלקת אותו ביחס $(a-1)$: $XL : LZ = 1$, כלומר $XL : XZ = 1 : a$, ו-M – נקודה על קטע YZ אשר מחלקת אותו ביחס $(a-1)$: $YM : MZ = 1$, כלומר $YM : YZ = 1 : a$.
טענה זו היא תוצאה של משפט תלס (יש להשתמש בכך שעבור כל נקודה P על הישר LM, הגובה מ-P לצלע XY קטן פי a מהגובה מ-Z לצלע XY, ולהפך: אם מתקיים $S_{XYP} = \frac{1}{a}S_{XYZ}$, אזי הגובה מ-P לצלע XY קטן פי a מהגובה מ-Z לצלע XY).
הערה: ממשפט תלס נובע גם, ש-LM מקביל ל-XY.

עובדה זו מסבירה לנו, כיצד לחפש את הנקודה B:

יש לבנות ישר אשר מקביל לישר A_1B_1 ואשר נקודת החיתוך שלו עם הישר A_1C_1 מחלקת את הצלע A_1C_1 ביחס 1:6. יש לבנות גם ישר אשר מקביל לישר A_1C_1 ואשר נקודת החיתוך שלו עם הישר A_1B_1 מחלקת את הקטע A_1B_1 ביחס 2:5. B תהיה נקודת החיתוך של הישרים הללו.

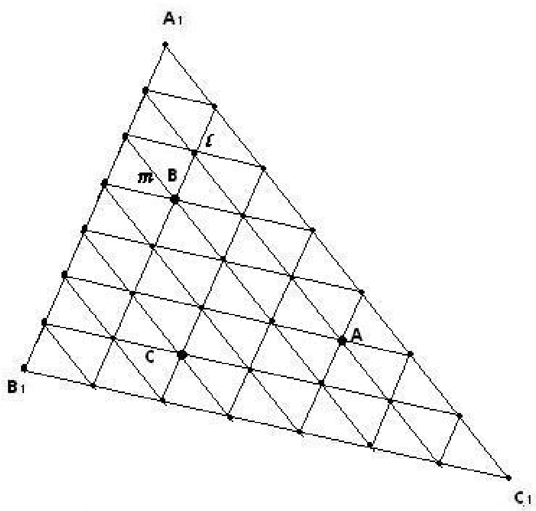
הישרים הנ"ל מתוארים בציור: (ונקראים m,l בהתאמה) :





נבנה ישרים אלו:

נחלק, בעזרת מחוגה וסרגל, את כל אחת מהצלעות A_1B_1 , A_1C_1 ל-7 חלקים שווי אורך (כמו בציור שלמעלה).נבנה ישרים אשר מקבילים לצלע A_1B_1 ועוברים דרך נקודות החלוקה שעל הצלע A_1C_1 , וישרים אשר מקבילים לצלע A_1C_1 ועוברים דרך נקודות החלוקה שעל הצלע A_1B_1 (ראה ציור:).



הישרים m, l שבציור הם הישרים שהזכרנו מקודם. B היא נקודת החיתוך שלהם. משיקולים דומים, אנו יכולים למקם על הציור את הנקודות C ,A (או שאפשר לבנות אותם ישירות: C נמצאת על המשך של A_1B ומרחקה מ-B שווה לאורך A_1B , ואילו A נמצאת על המשך של C_1B ומרחקה מ-B שווה לאורך C_1B).

<u>הערה:</u> למעשה, כדי לבצע בנייה זו, השתמשנו בשתי פעולות בסיסיות שאנו יודעים לבצע עם סרגל ומחוגה: העברת ישר אשר עובר דרך נקודה נתונה ומקביל לישר נתון (הנקודה הנתונה לא נמצאת על הישר הנתון) וחלוקת קטע ל-n חלקים שווי אורך (n – מספר טבעי). את הבנייה השנייה ניתן לבצע בעזרת הבנייה הראשונה ומשפט תלס. לאלו אשר לא יודעים, כיצד לבצע פעולות אלו, מומלץ להסתכל בספר גיאומטריה בפרק על בניות בעזרת סרגל ומחוגה.

3) מגדירים פונקציה f: N→N כך ש- $f(1)=1$, $f(2)=2$,

$$f(3n)=5f(n)$$

$$f(3n+1)=f(3n)+1$$

$$f(3n+2)=f(3n)+2$$

לכל n טבעי (n>0).

א) עבור כמה מערכי n מתקיים: f(n)<1000? נמק/י!

ב) עבור כמה מערכי n אשר מקיימים את התנאי מסעיף א) מתקיים גם: f(n) – זוגי? נמק/י!

<u>פתרון:</u> אנו קודם כל נמצא בפירוש, מהי הפונקציה הזו, ואז נענה על השאלות שנשאלו. למעשה, ניתן לפתור את סעיף א' גם בלי לעשות זאת, אלא להשתמש בשיקולי גידול מונוטוני של הפונקציה.

<u>טענה:</u> הפונקציה f מעבירה מספר טבעי N למספר טבעי f(N) אם הרישום של N בבסיס 3 (שיטת ספירה טרינארית) זהה לרישום של f(N) בבסיס 5.

כלומר, אם נתון מספר N, אז כדי לחשב את המספר f(N), יש לכתוב את N בבסיס 3, לקחת את המספר שקיבלנו ולהתייחס אליו כאילו שהוא כתוב בבסיס 5. את המספר החדש (בבסיס 5) נעביר בחזרה לבסיס 10, ונקבל את הערך של f(N). לדוגמא, ניקח N=5. נכתוב אותו בבסיס 3: $5_{10}=12_3$. כעת ניקח את המספר 12 בבסיס 5: $12_5=5_{10}+2_{10}=7_{10}$.

קיבלנו ש- f(N)=7.

<u>הוכחת הטענה:</u> נוכיח את הטענה באינדוקציה.

בסיס: N=1, N=2 – במקרים האלו הטענה מתקיימת.

מעבר: יהי N>2. אנו מניחים כי לכל N>K, הטענה נכונה ל-K.

נחלק את N ב-3 עם שארית: $N=3Q+R$ ($0\le R\le 2$). אז, לפי הגדרת f, $f(N)=5f(Q)+R$. נסמן: $Q=(\overline{a_m a_{m-1} a_{m-2} ... a_2 a_1 a_0})_3$ (הקו העליון מצביע על כך שמדובר ברישום של מספר, ולא במכפלה).

נכתוב את N בבסיס 3: $N=(\overline{a_m a_{m-1} a_{m-2} ... a_2 a_1 a_0 R})_3$. עכשיו מתייחסים למספר הזה כאל מספר הכתוב בבסיס 5:

$$f(N)=(\overline{a_m a_{m-1} a_{m-2} ... a_2 a_1 a_0 R})_5=5_{10}\cdot(\overline{a_m a_{m-1} a_{m-2} ... a_2 a_1 a_0})_5+R=5\cdot f(Q)+R$$

(בשוויון האחרון מימין השתמשנו בכך ש- Q<N, ולכן, עפ"י הנחת האינדוקציה, הטענה מתקיימת עבור Q).

נשים לב כי טווח הערכים שהפונקציה מקבלת הוא כל המספרים אשר ברישומם בבסיס 5 מופיעות רק הספרות 0,1,2.
כעת נענה על השאלות שנשאלו:

א) <u>תשובה:</u> 161.

<u>הסבר:</u> קל לראות, הן מההגדרה של הפונקציה, והן מהטענה הנ"ל, כי הפונקציה היא פונקציה עולה, כלומר, אם M<N, אז f(M)< f(N). לכן מספיק למצוא את המספר N הגדול ביותר אשר מקיים: f(N)<1000. נכתוב את 1000 בבסיס 5: $1000_{10}=13000_5$. המספר הגדול ביותר מהטווח של f אשר קטן מ-1000 הוא, על כן, $12222_5=937_{10}$. לכן $N=12222_3=161_{10}$ הוא המספר הגדול ביותר אשר מקיים: f(N)<1000. מכאן שהתשובה היא 161.

ב) <u>תשובה:</u> 80.

<u>הסבר:</u> נבדוק, מתי הערכים בטווח של f הם זוגיים. X בטווח של f אם, $X=(\overline{a_m a_{m-1} a_{m-2} ... a_2 a_1 a_0})_5$, וכל הספרות ברישום זה הן 0, 1, 2. X הוא זוגי אם ורק אם סכום ספרותיו ברישומו בבסיס 5 הוא זוגי, זאת אומרת, אם

$a_m + a_{m-1} + a_{m-2} + ... + a_2 + a_1 + a_0$ הוא מספר זוגי (ראה הערה בסוף הפתרון). לכן X נמצא בטווח של f והוא זוגי אם ורק אם כל ספרותיו הן בין 0 ל-2, וסכומן הוא מספר זוגי.
זה מתקיים אם ורק אם המספר $N = (\overline{a_m a_{m-1} a_{m-2} ... a_2 a_1 a_0})_3$ הוא מספר זוגי. שימו לב, f(N) =X. על כן f(N)=X הוא זוגי אם ורק אם N הוא זוגי.
עכשיו נתבונן בערכי N אשר מקיימים את התנאי מסעיף א) ומקיימים גם: f(N) – זוגי. כפי שראינו, זה מתקיים כאשר N זוגי, וכאשר $N \le 161$. ישנם 80 ערכי N כאלו (כל המספרים הזוגיים מ-1 עד 161).

הערה: בסעיף ב' השתמשנו ב-2 סימני התחלקות דומים:
- מספר טבעי הוא זוגי אם ורק אם סכום הספרות ברישומו בבסיס 5 הוא זוגי.
- מספר טבעי הוא זוגי אם ורק אם סכום הספרות ברישומו בבסיס 3 הוא זוגי.
סימני התחלקות אלו מבוססים על כך ש-5,3 הם מספרים אי-זוגיים. הוכחת סימני התחלקות אלו דומה להוכחת סימן התחלקות של מספר ב-3 בבסיס 10.

4) היה היה ארמון מכושף, ובו 120 חדרים במעגל, אשר ממוספרים (ע"י מספרים מ-1 עד 120) לפי כיוון השעון. בכל אחד מהחדרים ישבה נסיכה או דרקון. בהתחלה היו בארמון K נסיכות ושאר היצורים היו דרקונים. ליד השער הראשי של הארמון היה תלוי שק עם 120 אבנים ממוספרות מ-1 עד 120.
יום אחד הגיעו לארמון 120 נסיכים (לא בהכרח באותה שעה).
בהגעתו ניגש כל נסיך אל השער הראשי של הארמון ושלף מן השק אבן אחת באקראי ובלי להחזיר אותה לשק. לאחר מכן הוא ניגש ישירות לחדר שמספרו מצוין על האבן.
נסיך שהגיע לחדר עם דרקון, נלחם בו, ניצח אותו, והדרקון הפך לנסיכה. לאחר מכן הנסיך עבר לחדר הבא בכיוון השעון כדי להציל את שאר הנסיכות.
נסיך שהגיע לחדר בו ישבה נסיכה, נישק אותה ובכך הפך אותה לדרקון שטרף אותו מיד. איך הסתיים ביקור הנסיכים בארמון – הן עבור הנסיכים והן עבור הנסיכות? נמק/י!
<u>הערה:</u> בכל רגע ורגע יכולים לשהות בארמון כמה נסיכים, אך אסור לשני נסיכים להיות באותו חדר בו-זמנית.

<u>תשובה:</u> כל הנסיכים ימותו. אם K=120, אז בסוף יישארו רק דרקונים. אחרת, המצב בסוף יהיה זהה למצב בהתחלה – בכל חדר בו ישבה בהתחלה נסיכה, תהיה נסיכה, ובכל חדר בו ישב דרקון, יהיה דרקון.

<u>הסבר:</u>
מדוע כל הנסיכים ימותו? נניח שהחל מרגע מסוים, ישנם M נסיכים שאינם נהרגים יותר (M>0). זאת אומרת שאף נסיך יותר לא מגיע לחדר עם נסיכה. כלומר, אין יותר חדרים עם נסיכות ולא יהיו יותר, ובכל החדרים יושבים דרקונים. אבל הנסיכים ממשיכים לבקר בחדרים, לכן כאשר אחד הנסיכים ייכנס לחדר כלשהו, לאחר יציאתו תמצא בחדר זה נסיכה. סתירה. לכן כל הנסיכים יהרגו. אין מה לעשות...

אם בהתחלה בכל חדר ישבה נסיכה (כלומר, אם K=120), אז כל נסיך יגיע לחדר שמספרו מצוין על האבן, יהרג, והנסיכה בחדר תהפוך לדרקון. כלומר, כל הנסיכות ייהפכו לדרקונים, ובסוף יישארו רק דרקונים.

עכשיו אנו מניחים שבהתחלה היה בארמון לפחות דרקון אחד (כלומר, K<120).
אנו יודעים, שעם בואו של כל מבקר, היצור בחדר "מחליף דמות" – הופך ליצור אחר.
לכן כדי להבין, מי יימצא בחדר מסוים בסוף הסיפור, יש לבדוק, האם מספר המבקרים בחדר זה היה זוגי או לא. אם הוא היה זוגי, אז היצור שימצא שם בסוף יהיה זהה ליצור שהיה שם בהתחלה (כי הוא עבר מספר זוגי של "חילופי דמות"). אם מספר המבקרים יהיה אי-זוגי, אז היצור שימצא שם בסוף יהיה שונה מהיצור שהיה שם בהתחלה.
על כן אנו חוקרים את הזוגיות של מספר המבקרים בכל חדר.

<u>נשים לב כי בכל חדר ביקר לפחות נסיך אחד.</u> מדוע? ניבחר חדר כלשהו. נסיך אשר הוציא אבן עם מספר החדר חייב להגיע קודם כל לחדר זה – אין לו ברירה. הוא אינו יכול לההרג קודם. לכן בכל חדר ביקר לפחות נסיך אחד.

מיהם הנסיכים שנאכלים בחדר מסוים? אם בהתחלה בחדר ישבה נסיכה, אז כל מבקר אי-זוגי שהגיע לחדר (ראשון, שלישי, חמישי וכו') נטרף, וכל מבקר זוגי יצא מהחדר הזה בשלום והמשיך לחדר הבא.
אם בהתחלה בחדר ישב דרקון, אז כל מבקר זוגי בחדר נטרף (שני, רביעי, שישי וכו'), וכל מבקר אי-זוגי יצא מהחדר בשלום והמשיך לחדר הבא.

(*) מיהם הנסיכים שביקרו בחדר מספר i ? אלו היו נסיך מספר i, וכל הנסיכים שיצאו מהחדר מספר i-1. (*)

טענה: בכל חדר ביקרו לפחות 2 נסיכים.
הוכחה: אנו יודעים כבר כי בכל חדר ביקר לפחות נסיך אחד. נניח בשלילה כי קיים חדר מספר j שבו ביקר רק נסיך אחד.
ז"א, עפ"י (*), מהחדר הקודם לא יצא אף נסיך. כלומר, בחדר הקודם ביקר נסיך אחד בדיוק (והוא נהרג). לכן גם בחדר שלפניו ביקר נסיך אחד בדיוק (מאותן סיבות).
כלומר בכל חדר היה מבקר אחד בלבד, והוא נהרג. מכאן שבכל החדרים יישבו בהתחלה נסיכות. אבל הנחנו כי $K<120$, ובהתחלה היה לפחות דרקון אחד. סתירה.

לכן עכשיו אנו יודעים כי בכל חדר ביקרו לפחות 2 נסיכים. לכן בכל חדר נהרג לפחות נסיך אחד. כיוון שמספר הנסיכים שווה למספר החדרים, נסיק שבכל חדר נהרג נסיך אחד בדיוק.

נתבונן כעת בגורלו של הנסיך האחרון שנשאר בחיים. הוא הגיע לחדר כלשהו ונהרג. אנו יודעים כבר, שהוא לא היה המבקר היחיד בחדר הזה (כי כפי שאמרנו בטענה הקודמת, בכל חדר ביקרו לפחות שני נסיכים). אבל ידוע גם, כי אחריו אף אחד לא ביקר בחדר הזה – כי הוא האחרון שנשאר בחיים. לכן היה מבקר לפניו, וסה"כ היו בחדר זה 2 מבקרים.

לכן יש חדר שבו היו שני מבקרים. כפי שראינו, רק אחד מהם נהרג, והשני שרד והלך לחדר הבא. לכן בחדר בא היו גם כן 2 מבקרים (ראה/י (*) למעלה), וכפי שראינו, בדיוק אחד מהם נהרג, ואחד שרד. לכן גם בחדר שאחרי היו בדיו 2 מבקרים, וכן הלאה.
קיבלנו, שבכל חדר היו 2 מבקרים בדיוק.

מטענה זו רואים, כי מספר המבקרים בחדר - תמיד זוגי (כי הוא תמיד שווה ל-2). עם בואו של המבקר הראשון היצור משנה את דמותו – הופך ליצור אחר, ועם בואו של הנסיך השני חוזר למצבו ההתחלתי. לכן היצור שיושב בחדר מסוים בסוף הסיפור – לאחר מות כל הנסיכים – הוא גם היצור שישב בחדר זה בתחילת הסיפור.

5) מהו האורך המקסימאלי שיכול להיות לקטע פתוח בישר הממשי המקיים:
לכל פולינום מדרגה 2008 , עם מקדם ראשי 1 ואשר שאר מקדמיו שייכים לקטע הנ"ל אין שורשים ממשיים? נמק/י!

תשובה: $\frac{1}{1004}$.
הוכחה: נניח שהקטע הפתוח (a, b) מקיים את תנאי הבעיה. קודם כל, נשים לב כי כל פולינום אשר מקיים את התנאי בבעיה אינו מתאפס, אך עבור ערכי x מספיק גדולים, הוא נהיה חיובי. על כן כל פולינום אשר מקיים את התנאי בבעיה מקבל רק ערכים חיוביים.
נבחר שני מספרים p, q מהקטע, כאשר $q < p$. נתבונן בפולינום
$f(x) = x^{2008} + px^{2007} + qx^{2006} + \ldots + qx^2 + px + q$ (p הוא מקדם של כל הדרגות האי-זוגיות של x, ו-q הוא מקדם של כל הדרגות הזוגיות חוץ מ-2008).
פולינום זה מקבל רק ערכים חיוביים. על כן $f(-1) = 1 + 1004(q - p) > 0$, ומכאן:

$p - q < \frac{1}{1004}$. כיוון שזה מתקיים לכל שני מספרים p, q מהקטע, כאשר q < p, נוכל להסיק כי $b - a \le \frac{1}{1004}$. על כן האורך המקסימאלי של קטע פתוח אשר מקיים את תנאי הבעיה אינו עולה על $\frac{1}{1004}$.

נראה כעת כי קיים קטע פתוח באורך $\frac{1}{1004}$ אשר מקיים את תנאי הבעיה, ובכך נסיים את ההוכחה.

אנו טוענים כי הקטע הפתוח $(1, 1+{}^{1}/_{1004})$ מקיים את תנאי הבעיה. יהי $f(x) = x^{2008} + a_1x^{2007} + a_2x^{2006} + \ldots + a_{2008}$ – פולינום אשר כל מקדמיו חוץ מהמקדם הראשי נמצאים בקטע $(1, 1+{}^{1}/_{1004})$. אזי הפולינום $f(x)$ - חיובי עבור x אי-שליליים, ועבור $x < 0$ מקיים: $f(x) > x^{2n} + \frac{1005}{1004}x^{2n-1} + x^{2n-2} + \ldots + x^2 + \frac{1005}{1004}x + 1$.

נשאר לנו להראות, כי הפולינום באגף הימני הוא אי-שלילי לכל $x < 0$. זה שקול לכך שהפולינום $g(x) = 1004x^{2008} - 1005x^{2n-1} + 1004x^{2n-2} + \ldots + 1004x^2 - 1005x + 1004$ מקבל רק ערכים אי-שליליים עבור $x > 0$. בשביל להראות זאת, מספיק להוכיח כי ל- $g(x)$ יש רק שורש אחד חיובי, והוא $x_0 = 1$.

ניקח את הפולינום

$h(x) = (x^2 - 1)g(x) = 1004(x^{2010} - 1) - 1005(x^{2009} - x) = 1004x^{2010} - 1005x^{2009} + 1005x - 1004$

כדי להוכיח כי ל- $g(x)$ יש רק שורש אחד חיובי, והוא $x_0 = 1$, מספיק להראות כי ל-$h(x)$ יש רק שורש חיובי אחד - $x_0 = 1$. קל לראות כי $h(1) = h'(1) = 0$, וגם כי $h''(x) = 2\cdot1004\cdot1005\cdot2009(x^{2n} - x^{2n-1})$. על כן h'' מתאפסת רק בנקודה $x_0 = 1$, ולכן h' אינה שלילית בשום נקודה בה $x > 0$ (ושווה ל-0 רק בנקודה $x_0 = 1$). מכאן נסיק ש- h היא פונקציה עולה ממש עבור $x > 0$, ולכן יש לה רק שורש חיובי אחד - $x_0 = 1$. הוכחנו את הנדרש.