פתרונות האולימפיאדה הארצית ה-48
ע"ש פרופ' גיליס במתמטיקה, תשע"ה

1. א. מצאו דוגמה לשלושה מספרים שלמים חיוביים a,b,c עבורם
$31a+30b+28c=365$.

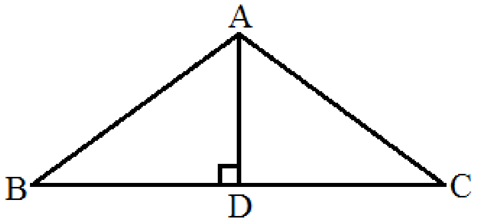
ב. הראו שאם מספרים שלמים חיוביים a,b,c מקיימים את התנאי הנ"ל, אז
$a+b+c=12$.

פתרון. א. למשל $a=7\ ,\ b=4\ ,\ c=1$. במקרה זה
$$31a+30b+28c=30(a+b+c)+a-2c=30\cdot 12+7-2=360+5=365.$$
(דוגמה זו מזכירה לוח שנה לועזי.)
דוגמה נוספת היא $a=9\ ,\ b=1\ ,\ c=2$. אפשר להראות שאין דוגמות נוספות.

ב. נוכיח כי $a+b+c\le 11$ זה מעט מדי. אכן, במקרה זה
$$365=31a+30b+28c\le 31(a+b+c)\le 31\cdot 11=341.$$
נוכיח גם כי $a+b+c\ge 13$ זה יותר מדי. אכן, במקרה זה
$$365=31a+30b+28c\ge 31+30+28(a+b+c-2)\ge 61+28\cdot 11=$$
$$=61+220+88=61+308=369.$$
ולכן $11<a+b+c<13$, כלומר $a+b+c=12$.

2. אורכי הגבהים במשולש הם $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5}$. מצאו את שטחו.

פתרון. נזכיר כי שטח המשולש הוא $S=\frac{ah}{2}$, כאשר a הוא אורך אחת הצלעות, ו-h הוא אורך הגובה המתאים. באופן שקול ניתן להגיד כי $a=\frac{2S}{h}$. אם שטח המשולש שלנו הוא S, אז צלעותיו הן $2S\cdot 8$, $2S\cdot 5$, $2S\cdot 5$, כלומר המשולש שווה-שוקיים. נסמן את קודקודי המשולש ב-A, B, C, כאשר BC הוא הבסיס (כלומר AB = AC). נסמן ב-D את אמצע הצלע BC. אז המשולש BAD הוא ישר-זווית, בו אורך היתר הוא $2S\cdot 5$,



אורך הבסיס הוא $\frac{\mathrm{BC}}{2}=2S\cdot 4$, ולכן ממשפט פיתגורס קל להסיק כי אורך הניצב AD הוא $2S\cdot 3$. מצד שני AD הוא הגובה הקטן במשולש ABC, ולכן על פי הנתון אורכו $\frac{1}{8}$. כלומר $\frac{1}{8}=2S\cdot 3$, ולכן $S=\frac{1}{48}$. מש"ל.

3. הוכיחו שהמספר $\left(\frac{76}{\frac{1}{\sqrt[3]{77}-\sqrt[3]{75}}-\sqrt[3]{5775}}+\frac{1}{\frac{76}{\sqrt[3]{77}+\sqrt[3]{75}}+\sqrt[3]{5775}}\right)^3$ הוא שלם.

פתרון. נזכיר שתיים מנוסחות הכפל המקוצר: $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

מכאן נקבל $\frac{\sqrt[3]{77}^2+\sqrt[3]{77\cdot 75}+\sqrt[3]{75}^2}{77-75}=\frac{1}{\sqrt[3]{77}-\sqrt[3]{75}}$.

נזכיר, כי $76^2 = 5776$ (כלומר השנה העברית הבאה תהיה ריבוע שלם), ולכן

$77\cdot 75=(76+1)(76-1)=5776-1=5775$.

לכן

$$\frac{76}{\frac{\sqrt[3]{77}^2+\sqrt[3]{77\cdot 75}+\sqrt[3]{75}^2}{2}-\sqrt[3]{5775}}=\frac{2\cdot 76}{\sqrt[3]{77}^2+\sqrt[3]{5775}+\sqrt[3]{75}^2-2\sqrt[3]{5775}}=$$

$$=\frac{2\cdot 76}{\sqrt[3]{77}^2-\sqrt[3]{57\cdot 77}+\sqrt[3]{75}^2}=\frac{2\cdot 76\cdot\left(\sqrt[3]{77}+\sqrt[3]{75}\right)}{77+75}=\sqrt[3]{77}+\sqrt[3]{75}$$

באופן דומה $\frac{\sqrt[3]{77}^2-\sqrt[3]{77}\cdot\sqrt[3]{75}+\sqrt[3]{75}^2}{77+75}=\frac{1}{\sqrt[3]{77}+\sqrt[3]{75}}$, ולכן

$$\frac{76}{\sqrt[3]{77}+\sqrt[3]{75}}+\sqrt[3]{5775}=\frac{76\left(\sqrt[3]{77}^2-\sqrt[3]{77}\cdot\sqrt[3]{75}+\sqrt[3]{75}^2\right)}{77+75}+\sqrt[3]{57\cdot 77}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{77}^2-\sqrt[3]{77}\cdot\sqrt[3]{75}+\sqrt[3]{75}^2}{2}+\sqrt[3]{57\cdot 77}=\frac{\sqrt[3]{77}^2+\sqrt[3]{77}\cdot\sqrt[3]{75}+\sqrt[3]{75}^2}{2}$$

מכאן

$$\frac{1}{\frac{76}{\sqrt[3]{77}+\sqrt[3]{75}}+\sqrt[3]{5775}}=\frac{2}{\sqrt[3]{77}^2+\sqrt[3]{77}\cdot\sqrt[3]{75}+\sqrt[3]{75}^2}=\frac{2\left(\sqrt[3]{77}-\sqrt[3]{75}\right)}{77-75}=$$

$$=\sqrt[3]{77}-\sqrt[3]{75}$$

ולכן

$$\left(\frac{76}{\frac{1}{\sqrt[3]{77}-\sqrt[3]{75}}-\sqrt[3]{5775}}+\frac{1}{\frac{76}{\sqrt[3]{77}+\sqrt[3]{75}}+\sqrt[3]{5775}}\right)^3=$$

$$=\left(\sqrt[3]{77}+\sqrt[3]{75}+\sqrt[3]{77}-\sqrt[3]{75}\right)^3=\left(2\cdot\sqrt[3]{77}\right)^3=8\cdot 77$$

ואין ספק כי $8\cdot 77$ הוא מספר שלם.

4. נתונים 3 מספרים שלמים חיוביים k,m,n עבורם n^m מתחלק ב-m^n, וכן m^k מתחלק ב-k^m.

א. הוכיחו כי n^k מתחלק ב-k^n.

ב. מצאו שלשה k,m,n כנ"ל, בה כל המספרים שונים זה מזה וגדולים מ-1.

פתרון. א. נשתמש בסימון $a\,|\,b$ שמשמעותו "a מחלק את b". כל ראשוני p ולכל שלם חיובי a נסמן ב-$v_p(a)$ את השלם הגדול ביותר e עבורו $p^e\,|\,a$, כלומר $p^{v_p(a)}$ הוא חזקת p הגדולה ביותר שמופיעה ב-a. לכן מתקיים גם $a=\prod_p p^{v_p(a)}$. קל לראות שלכל a,b מתקיים $v_p(a\cdot b)=v_p(a)+v_p(b)$ ומכאן גם $v_p(a^b)=b\cdot v_p(a)$.

טענת עזר. $a\,|\,b$ אם ורק אם לכל ראשוני p מתקיים $v_p(a)\le v_p(b)$.

הוכחת הטענה: בכיוון אחד, אם $a\,|\,b$ אז לכל p מתקיים $p^{v_p(a)}\,|\,a\,|\,b$ ולכן בהכרח $v_p(a)\le v_p(b)$ מהגדרה. בכיוון שני, אם a לא מחלק את b, אז לשבר $\frac{b}{a}$ בייצוג מצוצמם יש מכנה גדול מ-1, ולכן מתחלק בראשוני כלשהו p, עבורו למעשה מתקיים $v_p(a)>v_p(b)$. מש"ל.

כעת נפתור את השאלה: נתון כי $m^n\,|\,n^m$. לפי טענת העזר, מכאן שלכל ראשוני p מתקיים $v_p(m^n)\le v_p(n^m)$. לפי נוסחת החזקה זה שקול ל-$n\cdot v_p(m)\le m\cdot v_p(n)$, ואחרי העברת אגפים נקבל $\frac{v_p(m)}{m}\le\frac{v_p(n)}{n}$. בדומה, מהנתון $k^m\,|\,m^k$ נקבל שמתקיים $\frac{v_p(k)}{k}\le\frac{v_p(m)}{m}$ לכל ראשוני p. משילוב שני האי-שיוונים נקבל $\frac{v_p(k)}{k}\le\frac{v_p(n)}{n}$, ששקול ל-$v_p(k^n)\le v_p(n^k)$ לכל ראשוני p, ולפי טענת העזר נקבל $k^n\,|\,n^k$. מש"ל.

ב. למשל, המספרים 27,9,3. ואכן $9^3=3^6$ מחלק את 3^9, ו-$3^{27}=27^9$ מחלק את $9^{27}=3^{54}$. ניתן לבנות אינסוף דוגמות דומות – למשל כל שלשה מהצורה x^a,x^b,x^c כאשר x גדול מ-1 ו-$a>b>c$ גם מהווה דוגמה.

5. נתונה פירמידה משולשת ABCD. נסמן ב-S_1 את הכדור החסום בה, שמשיק לכל פאות הפירמידה. תהא K נקודת ההשקה של S_1 והפאה ABC. נסמן ב-S_2 את הכדור החסום מחוץ לפאה ABC, שמשיק לפאה ABC ולהמשכי הפאות ABD, ACD, BCD. תהא L נקודת ההשקה של S_2 ו-ABC. נסמן ב-T את עקב הגובה מ-D לפאה ABC. הראו כי הנקודות K, T ו-L נמצאות על ישר אחד.

פתרון. נסמן ב-I את מרכז הכדור החסום S_1, נסמן ב-J את מרכז הכדור S_2.
נתבונן במישור שחוצה את הזווית בין הפאות ABD ו-ACD. הנקודות במישור זה הן הנקודות שנמצאות במרחק שווה משני מישורי הפאות ABD ו-ACD, ובפרט הנקודות A, I ו-J נמצאות עליו.
נתבונן גם במישור שחוצה את הזווית בין הפאות BCD ו-ACD. הנקודות במישור זה הן הנקודות שנמצאות במרחק שווה משני מישורי הפאות BCD ו-ACD, ובפרט הנקודות A, I ו-J נמצאות עליו.
שני המישורים שבנינו אינם מקבילים, לכן הם נחתכים לאורך קו ישר. הקו הישר הזה עובר דרך הנקודות A, I, J, שכן שלושתן שייכות לשני המישורים. לכן הנקודות A, I, J נמצאות על ישר אחד שיסומן ℓ. לכן גם עקבי האנכים מנקודות A, I, J למישור BCD נמצאים על ישר אחד, שהוא ההיטל של ℓ למישור BCD. אבל עקבי האנכים הם בדיוק T, K, L. אזי T, K, L על ישר אחד, מש"ל.

6. בשורה מסודרות n נורות (n שלם חיובי). בהתחלה חלק מהנורות דלוקות (אולי כולן). בכל דקה מצב הנורות יכול להשתנות: כל נורה תדלוק בדקה t+1 אם בדיוק נורה אחת מבין שכנותיה דלקה בדקה t, ואחרת היא תהיה כבויה. לכל הנורות יש בדיוק שתי שכנות, פרט לנורות בקצוות השורה, להן שכנה אחת.
עבור אילו ערכי n ניתן להבטיח שכל הנורות תהיינה כבויות כעבור זמן סופי?

תשובה. עבור מספרים מהצורה $n = 2^m - 1$ מובטח שהנורות תכבנה, ואחרת לא.

פתרון. נמספר את הנורות בשורה משמאל לימין במספרים 1, 2, ..., n. נשים לב לייצוג שקול של הבעיה: נייצג את מצב הנורות בסדרה באורך n של הספרות 0 ו-1, כאשר 0 מייצג נורה כבויה ו-1 מייצג נורה דולקת. כעבור דקה, הסדרה מתחלפת בסדרה חדשה, בה כל ספרה שווה לשארית החלוקה ב-2 של סכום השכנות שלה. לכן ניתן להגדיר חיבור של סדרות ספרות (או מצבי נורות): עבור שתי סדרות ספרות A ו-B, הספרה במקום ה-i בסכום A+B תהייה שווה לשארית מודולו 2 של סכום הספרות במקום ה-i ב-A וב-B.
תרגיל לקוראים: בדקו כי אם כעבור דקה הסדרה A עוברת לסדרה 'A ו- B עוברת לסדרה 'B אז הסדרה A+B עוברת לסדרה 'A'+B. מכאן נסיק שאם אחרי M דקות, כל הנורות מהמצב A תהיינה כבויות וכך גם עבור B, אז זה נכון גם ל-A+B.

נוכיח תחילה שאם n זוגי, לא מובטח כיבוי – למעשה, אם הנורות לא היו כבויות בהתחלה, הן לעולם לא תהיינה כבויות. ואכן, נניח שבדקה t היו נורות דולקות, אך בדקה t+1 כולן כבו. נתבונן בנורה השמאלית ביותר שדלקה בזמן t. לו הייתה לה שכנה משמאל, היא בהכרח הייתה נדלקת בזמן t+1. לכן אין לה שכנה משמאל, כלומר נורה זו היא נורה מספר 1. כעת, נורה מספר 2 לא דלקה בזמן t+1. שכנותיה הן 1 ו-3, ונורה 1 דלקה בזמן t, ולכן גם נורה 3 דלקה בזמן t. לכן מתוך כך שנורה 4 כבויה בזמן t+1 נקבל שנורה 5 הייתה דלוקה בזמן t, וכן הלאה, נקבל שכל הנורות 1, 3, 5, ... , n-1 דלקו בזמן t. אבל אם n-1 דלקה בזמן t, אז נורה n נדלקה בזמן t+1 – סתירה. לכן הנורות לעולם לא תכבנה. ה-n הזוגי היחיד עבורו כן מובטח כיבוי הוא $n = 0$ (אף פעם אין נורות דולקות, או נורות בכלל).

כעת נראה שעבור $n = 2k + 1$ אי-זוגי, הנורות תמיד תכבנה אם ורק אם זה נכון עבור k נורות. נחלק את הנורות לשתי קבוצות לפי זוגיות המיקום שלהן – ישנן k נורות זוגיות ו-

$k+1$ נורות אי-זוגיות. נקרא למצב של נורות "זוגי" אם דולקות בו רק נורות זוגיות, ו"אי-זוגי" אם דולקות בו רק נורות אי-זוגיות. נשים לב שאם לכל מצב התחלתי הנורות בסוף תכבנה, אז זה בפרט נכון גם לכל מצב זוגי או אי-זוגי. מצד שני, כל מצב של נורות ניתן להציג כסכום של מצב זוגי ומצב אי-זוגי, ולכן אם מצבים כאלו תמיד יכבו אז זה נכון לכל מצב. בנוסף נשים לב שאחרי צעד אחד, מצב אי-זוגי תמיד הופך למצב זוגי (כי לכל הנורות האי-זוגיות יהיו רק שכנים כבויים). לכן אם מצבים זוגיים תמיד יכבו, אז גם מצבים אי-זוגיים. בסה"כ קיבלנו שהנורות תמיד תכבנה אם ורק אם זה נכון לכל מצב התחלתי זוגי.

כעת, לכל מצב זוגי, נתאים שורה של k נורות שמתקבלת ממחיקת כל הנורות האי-זוגיות מהמצב המקורי. נשים לב שכעבור שתי דקות, המצב חוזר שוב למצב זוגי, והוא מתאים בדיוק למצב אליו השורה הקצרה עברה אחרי דקה. ואכן, לפי תכונות החיבור של מצבי נורות, מספיק לבדוק זאת רק עבור מצבים בהם דלקה נורה אחת בלבד. כעבור דקה, הנורה הזאת נכבית ושתי השכנות שלה נדלקות (שימו לב שאכן יש לה שתי שכנות משום שהיא נורה זוגית). לכן כעבור דקה נוספת, היא תשאר כבויה, השכנות שלה תכבנה, והשכנות הזוגיות שלה במרחק שתיים תדלקנה, אם קיימות, וזה בדיוק מה שקורה בשורה הקצרה לאחר דקה אחת. לכן הנורות תמיד תכבנה בכל מצב של n נורות אם ורק אם זה נכון בכל מצב זוגי של n נורות, וזה שקול לכך שזה יקרה בכל מצב של k נורות, כפי שטענו.

כעת נוכיח את הטענה הראשית. נכתוב $n+1=2^m q$ כאשר q מספר אי-זוגי, ו-m אי-שלילי. אנו טוענים כי הנורות תמיד תכבנה אם ורק אם $q=1$. ואכן, נשים לב שאם $m>0$, כלומר n אי-זוגי, אז לפי הטענה האחרונה נקבל שהנורות תכבנה אם ורק אם זה נכון עבור $k=\frac{n-1}{2}$ שמקיים $k+1=2^{m-1}q$. לכן ניתן להקטין את m עד שיהיה שווה ל-0, ובכל צעד נשמור על התכונה. בסוף נקבל $k=q-1$ שהוא זוגי, ואכן הוכחנו שהתכונה מתקיימת ל-k זוגי אם ורק אם הוא שווה 0, כלומר אם ורק אם $q=1$. מש"ל.

פתרון שני. טענת עזר: לכל שלם אי-שלילי k, ולכל נורה a בטווח $2^k \le a \le n+1-2^k$, המצב שבו הנורה a בלבד דולקת יעבור כעבור 2^k דקות למצב בו הנורות $a-2^k, a+2^k$ דולקות (אם הן קיימות), ואף אחת אחרת לא. נוכיח זאת באינדוקציה על k. בסיס האינדוקציה $k=0$ נובע מיידית מהגדרת פעולת הצעד כעבור דקה. נניח שהטענה נכונה עבור k ונוכיח עבור $k+1$. יהא a בטווח המתאים. הטווח הזה צר יותר מהטווח שמתאים ל-k, ולכן לפי הנחת האינדוקציה כעבור 2^k צעדים נגיע למצב בו $a-2^k, a+2^k$ דולקות, שהוא סכום שני המצבים בהם כל אחת מהן דולקת בנפרד. שתי הנורות עדיין נמצאות בטווח שמתאים ל-k, ולכן מהנחת האינדוקציה כעבור עוד 2^k צעדים השמאלית תדליק את $a-2^{k+1}, a$ והימנית תדליק את $a, a+2^{k+1}$. מכיוון ש-a דולקת בשני המצבים היא תהיה כבויה בסכומם, כלומר בסכום נראה בדיוק שהנורות $a-2^{k+1}, a+2^{k+1}$ תהיינה דלוקות וכל השאר כבויות, כנדרש.

נוכיח שכאשר $n=2^m-1$, הנורות תמיד תכבנה. מספיק להוכיח את זה עבור כל מצב בו רק נורה אחת דולקת, שכן כל מצב אחר הוא סכום של מצבים כאלו. כל נורה $0<a<2^m$

ניתן להציג בתור $a=2^k q$ כאשר q אי-זוגי ו-$0\le k<m$. נוכיח כי המצב שמתחיל בנורה בודדת a יכבה בסופו של דבר, באינדוקציה יורדת על k. בסיס האינדוקציה הוא $k\ge m$ - אין נורות כאלה בשורה, לכן הטענה נכונה באופן ריק. נניח שהטענה נכונה לכל $k'>k$ ונוכיח עבור k. נשים לב שבהכרח מתקיים $2^k\le 2^k q\le 2^m-2^k$, ולכן ניתן להשתמש בטענת העזר ולטעון שאחרי 2^k צעדים הנורה הבודדת תעבור למצב שהוא סכום של הנורות הבודדות $2^k(q-1),2^k(q+1)$. q אי זוגי, ולכן מספרי נורות אלה מתחלקים בחזקה של 2 עם מעריך גדול מ-k, ולכן על פי הנחת האינדוקציה כל אחד מהם יכבה בסופו של דבר. לכן זה נכון גם לסכום המצבים שלהם, ומכאן זה נכון גם עבור המצב שקדם לו, כלומר לנורה הבודדת שלנו. מש"ל.

כעת נותר להוכיח שעבור $n=2^m q-1$, כאשר $q>1$ אי-זוגי, לפעמים הנורות לא תכבנה. נתבונן בשורה מוקטנת שמורכבת מ-$q-1$ הנורות מהצורה $2^m k$. כל אחת מהן נמצאת בטווח הרלוונטי ל-m, ומטענת העזר מקבלים שאחרי 2^m צעדים הן מדליקות את הנורות $2^m(k-1),2^m(k+1)$, שהן שכנותיה בשורה המוקטנת. השורה המוקטנת היא באורך זוגי, ולכן ניתן להוכיח (כמו בפתרון הראשון) שהנורות לעולם לא תכבנה אם הן לא התחילו כבויות, כנדרש.

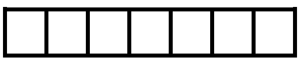
הערה. בשתי ההוכחות, על ידי מעקב מדויק, ניתן למעשה להוכיח כי במצבים בהן הנורות תכבנה, זה יקרה תוך לכל היותר n דקות. זה חסם הדוק – אם נתבונן למשל במצב תחילי בו רק נורה 1 דלקה, קל לראות שכעבור $k<n$ דקות הנורה הימנית ביותר שדולקת תהיה נורה מספר $k+1$, ולכן לא ייתכן שהנורות תכבנה לפני שעברו n דקות.

7. סדרת פיבונאצ'י מוגדרת באמצעות ערכי ההתחלה $F_0=0,\ F_1=1$ ונוסחת הנסיגה $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$. יהא p מספר ראשוני אי-זוגי,

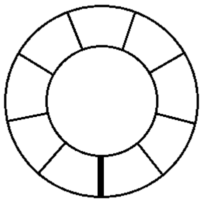
א. הוכיחו כי $F_{p-1}+F_{p+1}-1$ מתחלק ב-p.

ב. הוכיחו כי לכל k חיובי שלם, $F_{p^{k+1}-1}+F_{p^{k+1}+1}-\left(F_{p^k-1}+F_{p^k+1}\right)$ מתחלק ב-p^{k+1}.

פתרון ראשון. סעיף א' הוא מקרה פרטי של סעיף ב' עבור $n=0$, לכן נסביר ישר את סעיף ב'.



נניח שמרצפים פס $1\times n$ משבצות באמצאות מרצפות, שחלקן בגודל משבצת וחלקן אבני דומינו בגודל שתי משבצות. יש בדיוק F_{n+1} דרכים שונות לרצף. קל להוכיח זאת באינדוקציה: את הפס באורך 0 או 1 ניתן לרצף בדרך אחת בדיוק (שזה F_1 ו-F_2 בהתאמה), ואת הפס באורך n אפשר להתחיל (נגיד, בצד ימין) מריבוע או מדומינו. במקרה שמתחילים עם ריבוע, לפי הנחת האינדוקציה יש F_n דרכים להשלים את זה, ואם מתחילים מדומינו יש F_{n-1} דרכים להשלים את זה, לכן בסה"כ יש $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ ריצופים אפשריים.



כעת נעבור לאותה בעייה עבור טבעת שמורכבת מ- n משבצות במעגל. גם כאן נרצף אותה בשני סוגי מרצפות, משבצת ודומינו. נבחר קו הפרדה ספציפי ונרצף ממנו. אם יש דומינו שמכסה את קו ההפרדה, אז נותר לרצף פס ישר באורך $n-2$, ולכך יש F_{n-1} אפשרויות. אם אין דומינו שמכסה את הקו, אז צריך לכסות פס באורך n, ולכך יש F_{n+1} אפשרויות. לכן כמות הריצופים של הטבעת היא $F_{n-1}+F_{n+1}$.

כעת ניקח טבעת בה $n=p^{k+1}$. מצד אחד כמות הריצופים של הטבעת היא $F_{p^{k+1}-1}+F_{p^{k+1}+1}$. מצד שני, כל ריצוף ניתן לסובב ב- p^{k+1} דרכים. במקרים בהם p^{k+1} הריצופים שמתקבלים באמצעות סיבוב שונים זה מזה, נקבל כמות ריצופים שמתחלקת ב- p^{k+1}. הריצופים האחרים הם הריצופים שאפשר להעביר אותם לעצמם באמצעות סיבוב. ריצוף כזה חייב להיות מחזורי, והמחזור המינימלי שלו חייב להיות מחלק של $n=p^{k+1}$ שקטן מ- n, ולכן חייב להיות מחלק של p^k. כמות הריצופים האלו היא בדיוק כמות הריצופים של מעגל בגודל p^k, כלומר $F_{p^k-1}+F_{p^k+1}$. לכן ההפרש בין $F_{p^{k+1}-1}+F_{p^{k+1}+1}$ לבין $F_{p^k-1}+F_{p^k+1}$ מתחלק ב- p^{k+1}, מש"ל.

פתרון שני. נסמן $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, שהוא השורש הגדול של המשוואה $x^2=x+1$. השורש השני של המשוואה הוא $-\varphi^{-1}$.

תרגיל לקוראים: הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי $F_{n-1}+F_{n+1}=\varphi^n+\left(-\varphi\right)^{-n}$.

טענה. לכל k טבעי אי-זוגי, קיים פולינום T_k בעל מקדמים שלמים עבורו
$T_k\left(x-x^{-1}\right)=x^k-x^{-k}$ לכל x.

הוכחת הטענה. נוכיח קיום של פולינום כזה באינדוקציה. עבור $k=1$ זה ברור.

נניח שהוכחנו את הטענה לכל מספר אי-זוגי שקטן מ- k, ונוכיח ל- k. נסמן $z=x-x^{-1}$.

$$z^k=\left(x-x^{-1}\right)^k=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left(-1\right)^j x^{k-2j}=$$
$$=x^k-x^{-k}-\binom{k}{k-2}\left(x^{k-2}-x^{-k+2}\right)+\binom{k}{k-4}\left(x^{k-4}-x^{-k+4}\right)-\dots$$

לכן

$$x^k - x^{-k} = z^k + \binom{k}{k-2}\left(x^{k-2} - x^{-k+2}\right) - \binom{k}{k-4}\left(x^{k-4} - x^{-k+4}\right) + \dots$$
$$= z^k + \binom{k}{k-2} T_{k-2}(z) - \binom{k}{k-4} T_{k-4}(z) + \dots$$

באגף ימין רואים פולינום ב- z לפי הנחת האינדוקציה, וזה מסיים את הוכחת הטענה.

מההוכחה רואים בנוסף כי ניתן לכתוב $T_p(z) = z^p + p \cdot S(z)$, כאשר גם S הוא פולינום בעל מקדמים שלמים (הרי $\binom{p}{j}$ מתחלק ב- p לכל $1 \le j \le p-1$).

נגדיר $t_k = F_{p^k+1} + F_{p^k-1} = \varphi^{p^k} - \varphi^{-p^k}$. מהטענה נובע כי $t_{k+1} = T_p(t_k)$. נגדיר גם את הפולינום $Q(z) = T_p(z) - z$. אזי עלינו להוכיח ש- $t_{k+1} - t_k = Q(t_k)$ מתחלק ב- p^{k+1}.

נוכיח זאת באינדוקציה. בסיס האינדוקציה הוא סעיף א': ואכן, $t_0 = 1$, ולכן $Q(t_0) = p \cdot S(t_0)$, וברור שהוא מתחלק ב- p.

צעד האינדוקציה: נניח כי הטענה נכונה עבור $k-1$, ונוכיח עבור k.

לפי הנחת האינדוקציה $Q(t_{k-1}) = a \cdot p^k$, ולכן גם $t_k = t_{k-1} + a \cdot p^k$.

עובדה כללית על פולינומים: $P(x) = P(0) + x \cdot P'(0) + x^2 \cdot C(x)$, וכאשר P הוא פולינום בעל מקדמים שלמים אז גם C כזה. נציב $x - x_0$ במקום x ונקבל טענה כללית יותר:

$$P(x) = P(x_0) + (x - x_0) \cdot P'(x_0) + (x - x_0)^2 \cdot D(x).$$

מכאן נקבל: $Q(t_k) = Q\left(t_{k-1} + a \cdot p^k\right) = Q(t_{k-1}) + a \cdot p^k Q'(t_{k-1}) + d \cdot p^{2k}$, כאשר d שלם.

אבל $Q(z) = T_p(z) - z = z^p - z + p \cdot S(z)$. לכן $Q'(z) = -1 + b \cdot p$, כאשר b שלם. לכן

$$Q(t_k) = Q(t_{k-1}) + a \cdot p^k Q'(t_{k-1}) + d \cdot p^{2k} =$$
$$= a \cdot p^k + a \cdot p^k(-1 + b \cdot p) + d \cdot p^{2k} = ab \cdot p^{k+1} + d \cdot p^{2k}$$

ואגף ימין אכן מתחלק ב- p^{k+1}, מש"ל.