פתרונות בעיות האולימפיאדה ע"ש יוסף גיליס, התשס"ו

1. אנו מחפשים מספר בעל 6 ספרות 4,5,6,7,8,9 כך שהספרות הזוגיות וכן הספרות האי-זוגיות לא מופיעות זו ליד זו. כיוון שבנוסף לכך המספר מתחלק ב-8, אנו מסיקים כי במקומות האי-זוגיים של המספר (כשסופרים מימין) ספרות זוגיות ובמקומות הזוגיים ספרות אי-זוגיות.

נסמן את המספר שמחפשים ב- $n=\overline{a_6a_5a_4a_3a_2a_1}$ כאשר a_1 ספרת האחדות, a_2 ספרת העשרות, וכן הלאה. אנחנו כבר יודעים כי a_1,a_3,a_5 זוגיות, והשאר – אי-זוגיות.

אפשר לכתוב $n=\overline{a_6a_5a_4}\cdot 1000+a_3\cdot 100+a_2\cdot 10+a_1$. כיוון ש-1000 מתחלק ב-8, וגם $a_3\cdot 100$ מתחלק ב-8 (כי a_3 זוגי), המספר n מתחלק ב- 8 אם ורק אם $a_2\cdot 10+a_1$ מתחלק ב-8. כיוון ש- a_2 אי-זוגי, ניתן לכתוב $a_2=2b+1$ כך ש- $10a_2+a_1=20b+(10+a_1)$.

מספר זה מתחלק ב-8 רק כאשר $a_1=6$, $b=2c$ זוגי, זאת אומרת, $a_2=4c+1$.

זה נותן שתי האפשרויות $\overline{a_2a_1}=56{,}96$. שאר הספרות אפשר לבחור באופן שרירותי, מה שנותן לבסוף 8 פתרונות: $749856, 789456, 947856, 987456$ וכן $745896, 785496, 547896, 587496$.

2. יהיו a,b,c אורכי הצלעות הנמצאות מול הקדקודים A,B,C בהתאמה. אם S הוא שטח המשולש, אז $a=\frac{2S}{2}, b=\frac{2S}{4}, c=\frac{2S}{y}$. המשולש ABC דומה למשולש $A'B'C'$ שצלעותיו $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{y}$. מקדם הפרופורציה הוא $\frac{H}{2}$ כאשר H הוא הגובה היוצא מהקדקוד A' .

משולש בעל צלעות $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{y}$ יחיד עבור $y=3$ ולא קיים עבור $y=1$ כי $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}<1$.

לכן, גם המשולש ABC יחיד עבור $y=3$ ולא קיים עבור $y=1$.

3. נפרש את השלשות $v=(a,b,c)$ ו- $w=(x,y,z)$ כקואורדינאטות וקטורים ב- R^3 .

נשכתב את התנאים:

- $(v\cdot v)(w\cdot w)=4$, זאת אומרת, $\|v\|\cdot\|w\|=2$.
- $(v\cdot u)(w\cdot u)=3$ כאשר $u=(1,1,1)$.

המכפלות הסקלריות $v\cdot u,\quad w\cdot u$ בעלות אותו סימן; אם הן שליליות, נחליף u ב- $-u$ כדי לעשות אותן חיוביות.

תהי φ זווית בין v ל- u, ואילו ψ זווית בין w ל- u. זוויות φ ו- ψ חדות, כך ש- $\varphi+\psi<\pi$.

יתר על כן, השוויונות $v\cdot u=|v||u|\cos\varphi,\quad w\cdot u=|w||u|\cos\psi$ נותנים

$$\frac{(v\cdot u)(w\cdot u)}{|v||w||u|^2}=\cos\varphi\cos\psi=\frac{3}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}.$$

עלינו להוכיח כי $v\cdot w\ge 0$, או, במלים אחרות, כי הזווית בין v לבין w חדה.

זווית זו לא עולה על הסכום $\varphi+\psi$, כך שמספיק לבדוק $\frac{\pi}{2}\ge\varphi+\psi$.

$$\cos(\varphi+\psi)=\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi=\tfrac{1}{2}-\sin\varphi\sin\psi$$

אז עלינו לבדוק כי $\sin\varphi\sin\psi\le\frac{1}{2}$.

אבל

$$\sin^2\varphi\sin^2\psi=(1-\cos^2\varphi)(1-\cos^2\psi)=1+\tfrac{1}{4}-(\cos^2\varphi+\cos^2\psi)$$

ניקח בחשבון כי $\cos^2\varphi+\cos^2\psi \ge 2\cos\varphi\cos\psi=1$, כך שלבסוף $\sin^2\varphi\sin^2\psi \le \frac{1}{4}$.

4. מוכיחים בדרך השלילה.

יהי X_k אוסף כל זוגות (m,n) מספרים חיוביים שלמים המקיימים את התכונה $mn \le k$.

לפי ההנחה מספר איברים ב- X_k קטן או שווה ל- $2006k$.

אפשר אפוא לספור איברים ב- X_k כדלקמן:

- מספר זוגות (m,n) מתאימים עם $m=1$ הוא k.
- מספר זוגות (m,n) מתאימים עם $m=2$ הוא $\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$ (כאן $\lfloor x \rfloor$ מסמן מספר שלם הגדול ביותר שלא עולה על x, "החלק השלם של x").
- מספר זוגות (m,n) מתאימים עם $m=3$ הוא $\left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor$ – וכן הלאה.

בסך הכל מקבלים שמספר האיברים ב- X_k הוא $\left\lfloor \frac{k}{1} \right\rfloor+\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor+\ldots+\left\lfloor \frac{k}{k} \right\rfloor$.

מספר זה גדול מ- $\left(\frac{k}{1}-1\right)+\left(\frac{k}{2}-1\right)+\ldots+\left(\frac{k}{k}-1\right)$ שזה $k(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k})$. כדי להגיע לסתירה, מספיק להראות כי הביטוי בסוגריים גדול מ-2006 עבור k גדול מספיק.

את זה אפשר לעשות כך: סכום המספרים

$$\frac{1}{2^i+1}+\frac{1}{2^i+2}+\ldots+\frac{1}{2^{i+1}}$$

גדול מ- $\frac{1}{2}$ כי יש בו 2^i מחוברים שכל אחד מהם $\le \frac{1}{2^{i+1}}$. לכן עבור $k=2^{2\cdot 2006}$ הסכום $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}$ גדול מ- 2006.

5. נוכיח כי לא ניתן לקבל מעגל באורך 20.

נניח, בדרך השלילה, כי הדבר אפשרי.

קודם כל, נוכיח כי במקרה זה המעגל באורך 20 שיישאר יעבור דרך כל הערים.

ואמנם, בהתחלה כל הערים היו מחוברות על-ידי הכבישים, ולפי החוק, לא ניתן למחוק כביש אם הוא הכביש היחיד אל עיר מסוימת. לכן, לא תהיה עיר שכל הכבישים המובילים אליה נמחקו – זה מוכיח כי המעגל בן 20 כבישים שנשאר (אם הוא קיים) עובר דרך כל הערים.

עתה אפשר למספר את הערים במספרים מ-1 ועד 20, כך שהעיר הראשונה מחוברת לערים 20 ו-2, העיר מספר 2 מחוברת לערים מספר 1 ו- 3, וכן הלאה. בכל מקרה, בשלב זה ערים אי-זוגיות מחוברות רק לערים זוגיות ולהפך, ערים זוגיות מחוברות רק לערים אי-זוגיות.

עתה נבדוק באינדוקציה כי בכל שלב לא היו כבישים המחברים שתי ערים זוגיות או שתי ערים אי-זוגיות. כי אם בשלב מסוים מוחקים כביש אחד במעגל בן ארבע כבישים, כך ששלושה הכבישים שנשארו מחברים ערים זוגיות עם ערים אי-זוגיות, אזי גם הכביש שנמחק מקיים תכונה זו.

ובכן, על סמך ההנחה כי ניתן למחוק את כל הכבישים פרט למעגל באורך 20, הסקנו כי בכל שלב (גם מלכתחילה) לא היו כבישים שחיברו ערים זוגיות זו לזו.

קיבלנו סתירה.

6. קודם כל,

$$\frac{3^{44}-1}{80}=\frac{(3^4)^{11}-1}{3^4-1}=1+3^4+(3^4)^2+\ldots+(3^4)^{10}$$

זה סכום של 11 חזקות רביעיות . לכן, מספיק לנו להוכיח כי אין הצגה קצרה יותר של המספר.
נציין כי אם x מספר אי-זוגי, אז ל- x^4 שארית 1 בחילוק ב- 16 (ראה הסבר בסוף ההוכחה).

לכן, למספר $\frac{3^{44}-1}{80}$ שארית 11 בחילוק ב-16.

נציין עוד כי אם מספר y זוגי, אז y^4 מתחלק ב- 16.
לכן, אם קיימת הצגה

$$\frac{3^{44}-1}{80}=x_1^4+x_2^4+\ldots+x_m^4+y_1^4+\ldots+y_n^4$$

כך ש- x_i אי-זוגיים, ואילו y_j זוגיים, מקבלים כי השארית של $\frac{3^{44}-1}{80}$ שווה ל- m.

מסקנה: בכל הצגה כזאת מספר המחוברים האי-זוגיים m בעל שארית 11 בחילוק ב-16.
בפרט, $11 \le m$, כך שהמספר הכולל של המחוברים $m+n$ גם הוא גדול או שווה ל-11.

נוכיח את הטענה לגבי השאריות. אם $x=2a+1$, אז $x^2=4a^2+4a+1=4a(a+1)+1$.
למספר זה שארית 1 בחילוק ב-8 כי $a(a+1)$ זוגי. עתה, $(8c+1)^2=64c^2+16c+1$ - בעל שארית 1 בחילוק ב-16.

הטענה השניה ממש פשוטה: אם $y=2a$, $y^4=16a^4$ – מתחלק ב-16.