פתרונות לאולימפיאדת גיליס 2009

1. בבחירות כלליות לכנסת מדינת שוקניה משתתפות 12 רשימות. רשימה שקיבלה פחות מ- 5% קולות לא מקבלת מקומות בכנסת שוקניה. הרשימות שקיבלו בבחירות 5% קולות לפחות, מחלקות את 120 מקומות בכנסת בהתאם למספר הקולות שקיבלו.
מהו המספר המכסימאלי של מקומות בכנסת יכולה לקבל רשימה "עלה דפנה" אם היא קיבלה 25% קולות הבוחרים?

פתרון: להשלים

נסמן $a_1, a_2, ..., a_{12}$ - חלק מכלל הקולות אשר קיבלה כל רשימה, כאשר $a_1 = 0.25$ - מספר הקולות אשר קיבלה "עלה דפנה". כמו כן, נניח כי $a_{n+1}, a_{n+2}, ..., a_{12} < 0.05$ (לא עוברות לכנסת), ו- $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0.05$ (עוברות לכנסת). אם n=12, אז "עלה דפנה" תקבל 0.25 מהמקומות – כלומר, 30 מקומות. נראה כי ניתן לקבל יותר. לכן נניח כי n<12. אז מס' המקומות שיקבלו הרשימות $1,2,3,...,n$ יהיו $\frac{a_1 \cdot 120}{a_1 + ... + a_n}, \frac{a_2 \cdot 120}{a_1 + ... + a_n}, \ldots, \frac{a_n \cdot 120}{a_1 + ... + a_n}$. אז "עלה דפנה" יקבלו $\frac{a_1 \cdot 120}{a_1 + ... + a_n}$ מקומות. אז נקבל: $\frac{a_1 \cdot 120}{a_1 + ... + a_n} = \frac{0.25 \cdot 120}{1 - (a_{n+1} + ... + a_{12})} < \frac{30}{1 - 0.05 \cdot (12 - n)}$.
נשים לב כי n>1 (כי $a_1 = 0.25$, ולכן $a_2 + ... + a_{12} = 0.75 = 15 \cdot 0.05$. מכאן שלפחות אחד מ- $a_2, a_2, ..., a_{12}$ גדול מ-0.05). לכן

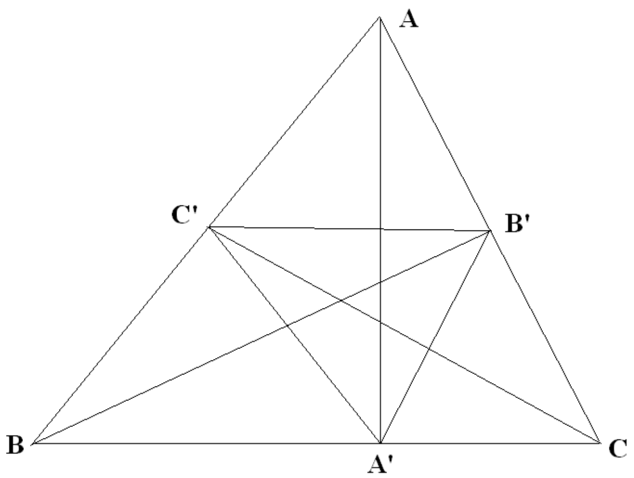
$$\frac{a_1 \cdot 120}{a_1 + ... + a_n} < \frac{30}{1 - 0.05 \cdot (12 - n)} \leq \frac{30}{1 - 0.05 \cdot (12 - 2)} = \frac{30}{0.5} = 60.$$

עד כה לא לקחנו בחשבון שהמספרים $\frac{a_1 \cdot 120}{a_1 + ... + a_n}, \frac{a_2 \cdot 120}{a_1 + ... + a_n}, \ldots, \frac{a_n \cdot 120}{a_1 + ... + a_n}$ אינם, בדרך כלל, שלמים. במציאות, אחרי שמצאנו את המספרים האלה, צריך לעגל אותם כדי לקבל מספרים שלמים. מהחישובים שעשינו נובע כי הרשימה "עלה דפנה" תקבל מספר מרבי של קולות כאשר 10 רשימות מתוך 12 יקבלו כמעט 5% קולות כל אחת, ואילו הרשימה האחרונה תקבל את השאר, זאת אומרת, קצת יותר מ- 25% של הקולות.

במקרה זה סביר להניח כי אחרי העיגול "עלה דפנה" תקבל 60 קולות.

2. במשולש ABC הנקודות A', B', C' נמצאות על הצלעות BC, AC ו- AB בהתאם, כך ש- AA' גובה, BB' תיכון ואילו CC' חוצה זווית. ידוע כי המשולש $A'B'C'$ הינו משולש משוכלל. האם בהכרח ABC משולש משוכלל?

תשובה: כן בהכרח.
פתרון: נביט בציור.



נסמן אורכי הצלעות של המשולש $A'B'C'$ ב- x והזווית $\angle ACB = 2\alpha$. מכיוון ש AA' גובה לכן $\angle AA'C = 90°$, BB' תיכון לכן גם $A'B'$ תיכון. מכיוון שתיכון ליתר במשולש ישר זווית שווה לחצי היתר קיבלנו ש $|A'B'| = \frac{|AC|}{2}$. כלומר $x = |B'C| = |AB'| = |C'A'| = |B'C'| = |A'B'|$.

הזוויות $\angle B'CC' = \angle C'CA' = \alpha$. משולש $C'B'C$ הוא שווה שוקיים ולכן $\angle B'C'C = \angle B'CC' = \alpha$. קיבלנו ש $\angle B'C'C = \angle C'CA$ ולכן $C'B' \| BC$. B' מחלק את AC לשני חלקים שווים ולכן גם C' מחלק AB לשני חלקים שווים. כלומר CC' תיכון. מכיוון שנתון ש CC' גם חוצה זווית נסיק שמשולש ACB שווה שוקיים ($AC = CB$) כי רק במשולש שווה שוקיים חוצה הזווית והתיכון מתלכדים.

AA' גובה במשולש ABC, לכן הוא ניצב גם ל $C'B'$. כיוון ש- $A'B'C'$ שווה צלעות, AA' מחלק את $C'B'$ לשני חלקים שווים. זה גורר כי AA' מחלק גם את BC לשני חלקים שונים. המסקנה: $AB = AC$.

מ.ש.ל.

3. מהו סכום הספרות המינימאלי של
מספר שלם חיובי המתחלק ב- 34 ?

פתרון.

ברור כי סכום הספרות של מספר המתחלק ב-34 לא שווה 1 – כי 10^n לא מתחלק ב-34.
נראה כי קיים מספר מתחלק ב-34 שסכום ספרותיו 2.
לשם כך נמצא מספר המתחלק ב-17 שסכום ספרותיו 2, ואז נכפיל אותו ב-10 – התוצאה תתחלק ב-34 וסכום ספרותיה תישאר 2. נשאר למצוא מספר המתחלק ב-17, שסכום ספרותיו 2.
נציין כי 102 מתחלק ב-17, כך של- 100 ול- 2- אותה שארית בחילוק ב-17.
זה גורר כי ל- $10^8 = 100^4$ ול- $16 = (-2)^4$ אותה שארית. במלים אחרות, המספר $10^8 + 1$ מתחלק ב-17.

תשובה: $10^9 + 10$ מתחלק ב-34 וסכום ספרותיו 2.

4. הוכח כי קיימים אינסוף מספרים שלמים חיוביים n כך שאף אחד מהמספרים n , $n+1$, $n+2$ לא מתחלק בריבוע שלם.

פתרון.

נניח בשלילה כי יש רק מספר סופי של שלישיות מספרים עוקבים נטולי ריבוע. במקרה זה, החל מרגע מסוים, בכל רבעיה $4k-3, 4k-2, 4k-1, 4k$ יש מספר אחד לפחות המתחלק בריבוע p^2

של מספר ראשוני $p \neq 2$. ב- k רבעיות הראשונות לכל היותר $\frac{4k}{p^2}$ רבעיות מכילות מספר המתחלק ב- p^2. בואו נאמוד את הסכום $\sum \frac{4k}{p^2}$ כאשר p עובר את כל הראשוניים > 2.
אם נראה כי ההפרש בין k לסכום זה שואף לאינסוף, זה יפתור את הבעיה.
מתקיים

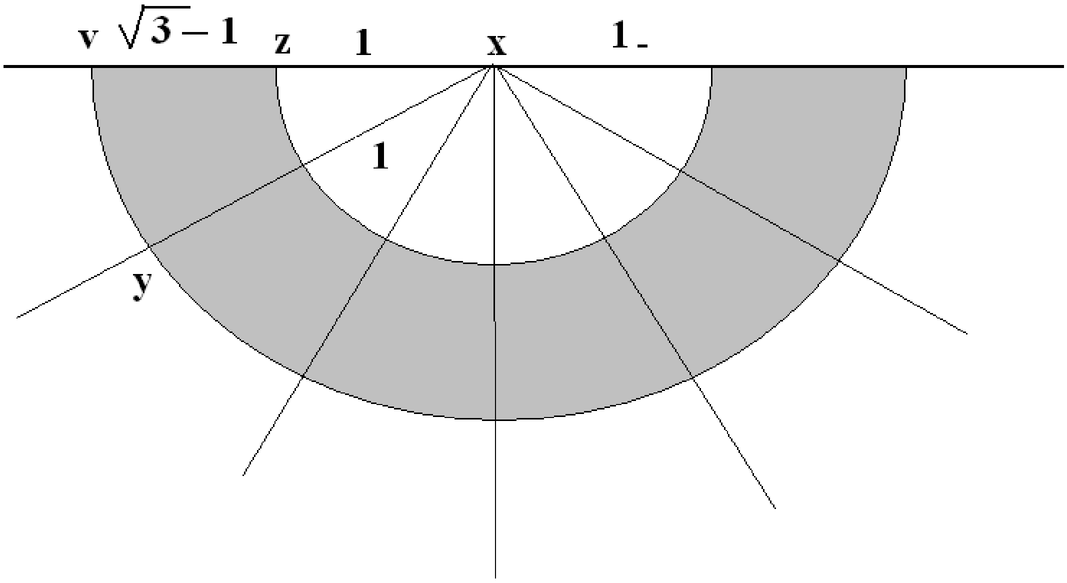
$$\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{11^2}+\ldots \leq \frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{4}\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \frac{1}{9}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{n=5}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{9}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\frac{1}{16}=\frac{1}{9}+\frac{1}{8}=\frac{17}{18\cdot 4}.$$

החישוב שעשינו מראה כי סכום המספרים מהצורה $\frac{4k}{p^2}$ קטן מ- $\frac{17}{18}k$. זה מסיים את ההוכחה.

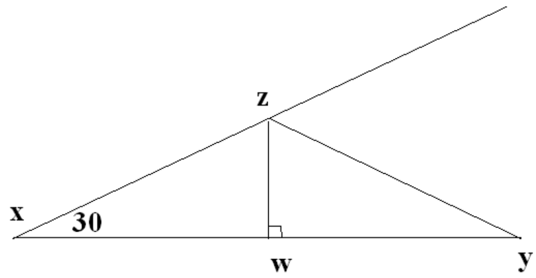
5. על המישור נתונים 2009 נקודות כך שמרחק בין כל שתי נקודות שונות גדול מ-1. הוכח שאפשר לבחור מהם 287 נקודות כך שמרחק בין כל שתי נקודות שונות גדול מ-$\sqrt{3}$.

פתרון: נבחר מערכת צירים (x, y) על המישור. ניקח נקודה עם ערך y גדול ביותר (אם יש כמה ניקח אחת באקראי). נסמן אותה ב x. נראה של x יש לכל היותר 6 נקודות במרחק פחות מ $\sqrt{3}$. בגלל שאין נקודה גבוהה מ x אזי מספיק להסתכל רק על חצי המישור שמתחת ל x. נצייר חצי מעגל ברדיוס 1 סביב x ורדיוס $\sqrt{3}$ סביב x. נחלק את חצאי המעגלים ל 6 קטעים שווים כמו בציור.



בגלל שהמרחק המינימאלי בין הנקודות הוא 1 מספיק להראות שבשטח האפור יש לכל היותר 6 נקודות. בשביל זה מספיק להראות שבכל אחד משששת השטחים האפורים יש לכל היותר נקודה אחת. נשים לב שכל ששת הצורות זהות והן סימטריות יחסית לציר העובר דרך x {וחוצה אותם בשני חצאים שווים}. נתבונן בצורה השמאלית מבין ששת הצורות. ראשית נחשב מרחק מ z

ל y . נסתכל על המשולש xyz . הזווית $\angle zxy$ שווה ל $30^\circ = \frac{180^\circ}{6}$. הצלעות $xz=1, xy=\sqrt{3}$.
נוריד אנך מ z ל xy .



מכיוון ש $xz=1$ ו $\angle zxy = 30^\circ$, נקבל ש $xw=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ולכן גם $wy=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ולכן $zy=1$.
נוכיח כי המרחק בין הנקודות y ו z הוא המרחק הגדול ביותר בין שתי נקודות הנמצאות בצורה שלנו.
נניח, בדרך השלילה, כי יש שתי נקודות a ו b שהמרחק ביניהם גדול מ 1. אם נמתח קו ישר בין a ו b,
ונמשיך אותו עד לחיתוך עם השפה של הצורה, רק נגדיל את המרחק. לכן, אפשר להניח כי הנקודות a ו b
נמצאות על השפה של הצורה. עכשיו עלינו לבחון כמה אפשרויות:

- הנקודות נמצאות על אותה צלע ישרה. במקרה זה המרחק המכסימאלי הוא $\sqrt{3}-1$. שזה קטן מ 1.
- הנקודות נמצאות על צלעות ישרות שונות. במקרה זה המרחק המכסימאלי $zy=1$ כי האפשרות שניה היא vy שזה קטן מ 1 (הרי vy קטן מ $\frac{1}{6}$ של חצי-עיגול ברדיוס $\sqrt{3}$ שזה $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$).
- אחת הנקודות על צלע ישרה והשניה על אחת הקשתות – כאן שוב מקבלים שהמרחק המכסימאלי שווה ל-1.
- נקודות על קשתות שונות – גם כאן המכסימום שווה ל- 1.
- הנקודות על אותה קשת – המכסימום $vy<1$ אם זאת הקשת הגדולה, ואפילו פחות מזה אם הקשת הקטנה.

בדרך זו אנו מסיקים כי בכל צורה כנ"ל יש לכל היותר נקודה אחת מהקבוצה.
כך אנחנו בחרנו נקודה אחת x לקבוצה החדשה שלנו, ואם נמחק את x יחד עם כל הנקודות הנמצאות בתוך החצי-עיגול ברדיוס $\sqrt{3}$, ראינו כי נמחק לכל היותר $1+6=7$ נקודות.

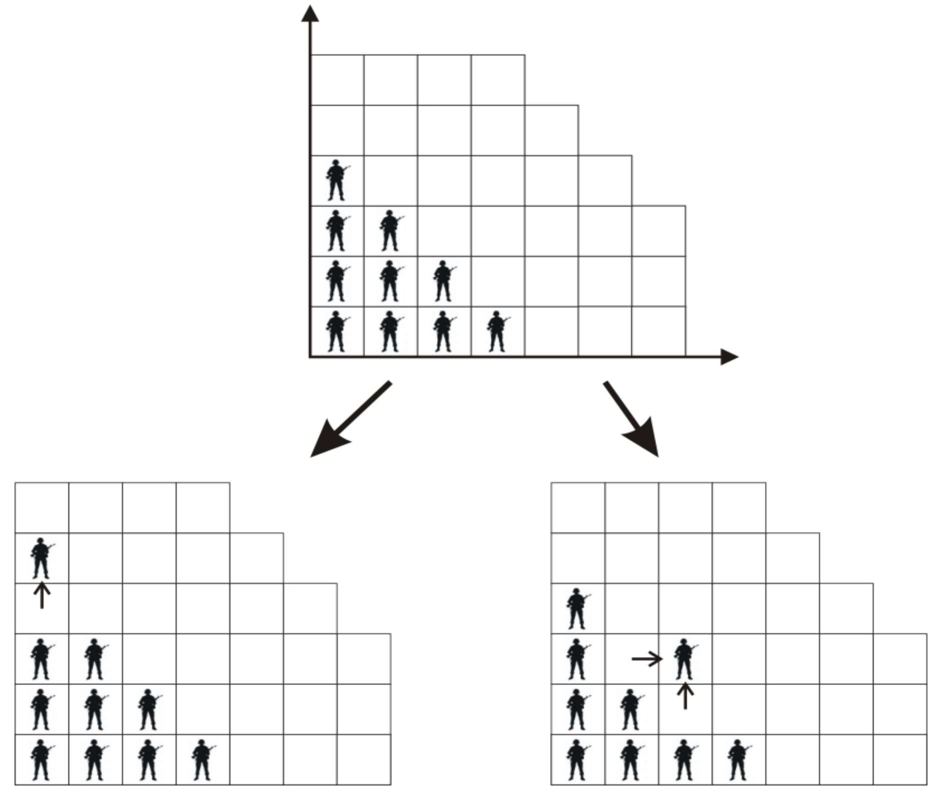
עכשיו אנחנו יכולים לחזור על התהליך שוב ושוב, עד שלא יגמרו הנקודות.
כתוצאה נוכל לבחור לפחות $\frac{2009}{7}=287$ נקודות.
מ.ש.ל.

6. לוח משחק בנוי מהנקודות (x,y) עם קואורדינאטות שלמות של הרבעון הראשון: $x\geq 0, y\geq 0$. במצב ההתחלתי של המשחק בכל משבצת עם קואורדינאטות (x,y) המקיימות $x+y\leq n$ נמצא חייל עופרת.
ישנם שני סוגי מסעות:

- העמדת חייל עופרת למשבצת פנימית $(x>0, y>0)$ במקום שני חיילים שבמשבצות השכנות ($(x\pm 1, y)$ או $(x, y\pm 1)$) .

- העמדת חייל עופרת למשבצת גבולית ($x=0$ או $y=0$) במקום חייל אחד שבמשבצת שכנה.

כמה חיילים יכולים להופיע בו זמנית על האלכסון $x+y=n+1$ במשך המשחק?



תשובה : n+1 חיילים.

פתרון :

נכתוב על הלוח מספרים ממשולש פסקל באופן הבא :

1							
1	6						
1	5	15					
1	4	10	20				
1	3	6	10	15	...		
1	2	3	4	5	6	...	
1	1	1	1	1	1	1	...

(כלומר, במקום (x,y) כתוב המספר $\binom{y+x}{x}$). נתבונן סכום המספרים שכתובים מתחת לכל חייל בכל שלב (כלומר, זהו חצי-אינווריאנט במשחק זה). הטענה היא שמספר זה אינו גדל לאורך המשחק. מדוע?

נראה כי מסע אחד אינו משנה את הסכום הנ״ל.

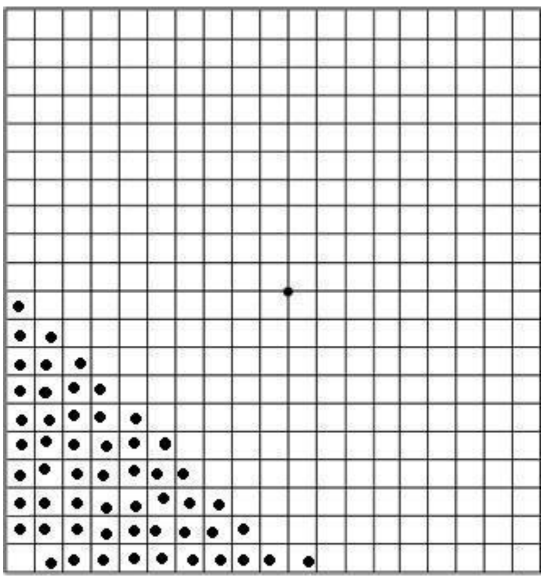
- מסע מסוג העמדת חייל עופרת למשבצת גבולית ($x=0$ או $y=0$) במקום חייל אחד שבמשבצת שכנה : מהסכום מפחיתים 1 (חייל שנעלם) ומוסיפים 1 (חייל שנוסף).
- מסע מסוג העמדת חייל עופרת למשבצת פנימית $(x>0, y>0)$ במקום שני חיילים שבמשבצות השכנות ($(x\pm1, y)$ או $(x, y\pm1)$) : מהסכום מפחיתים

- אם מוציאים את החיילים המשבצות $(x-1,y)$ ו- $(x,y-1)$, אז מפחיתים $\binom{y+x-1}{x+1}+\binom{y+x-1}{x-1}$.
- אם מוציאים את החיילים המשבצות $(x-1,y)$ ו- $(x,y+1)$, אז מפחיתים $\binom{y+x+1}{x}+\binom{y+x-1}{x-1}$.
- אם מוציאים את החיילים המשבצות $(x+1,y)$ ו- $(x,y-1)$, אז מפחיתים $\binom{y+x+1}{x+1}+\binom{y+x-1}{x}$.
- אם מוציאים את החיילים המשבצות $(x+1,y)$ ו- $(x,y+1)$, אז מפחיתים $\binom{y+x+1}{x+1}+\binom{y+x+1}{x}$.

לאחר מכן שמים חייל חדש במשבצת (x,y) - כלומר, מוסיפים $\binom{y+x}{x}$. (תרגיל: בדקו, כי הסכום אכן אינו גדל !).

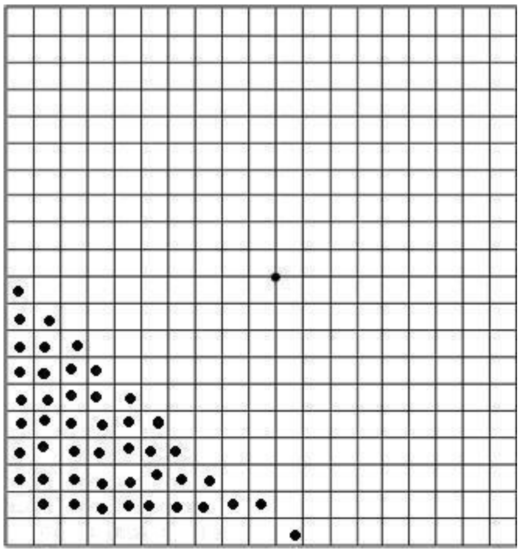
סכום המשבצות מתחת החיילים במצב ההתחלתי היה סכום n השורות הראשונות של משולש פסקל. סכום זה הוא $2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n=2^{n+1}-1$. סכום המספרים על המשבצות באלכסון ה-n+1 הוא 2^{n+1}, לכן אין אפשרות למלא את כל האלכסון הזה. נראה כי ניתן למלא n משבצות על אלכסון זה:

נוכל להזיז את כל השורה התחתונה משבצת אחת ימינה (קודם להזיז את החייל הימני ביותר, אחר כך את זה שאחריו, וכן הלאה). בכך נקבל את הציור הבא:



כעת ניקח את החיילים במקומות $(n,0),(n-1,1)$. נוריד אותם מהלוח ונשים חייל במשבצת $(n,1)$.

אחר כך נוריד את החיילים במשבצות $(n-1,0),(n-2,1)$, ונשים חייל במשבצת $(n-1,1)$.
נתקדם כך שמאלה, עד ציר Y – נוריד חיילים במשבצות $(m,0),(m-1,1)$ (כאן $1\le m\le n$), ונשים חייל במשבצת $(m,1)$. בכך נקבל:



עכשיו יש לנו חיילים בשתי משבצות על האלכסון $x+y=n+1$.

באופן דומה נפעל עם שאר השורות. בכל פעם, נוריד את כל החיילים שנמצאים בשורה k וקואורדינאטת ה-X שלהם קטנה מ-(n+1), ונזיז את כל החיילים בשורה k+1 משבצת אחת ימינה (וזאת ע״י מסעות מסוג 1). ע״י פעולה זו נקבל חייל במקום $(n-k,k+1)$. כל זאת ניתן יהיה לעשות עבור $0\le k\le n-1$. לכן לאחר כל הפעולות הנ״ל, החיילים היחידים שנקבל על הלוח יהיו חיילים במשבצות $(n+1,0),(n,1),(n-1,2),(n-2,3),\ldots(1,n)$: