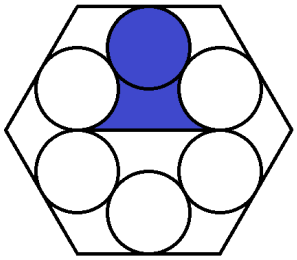
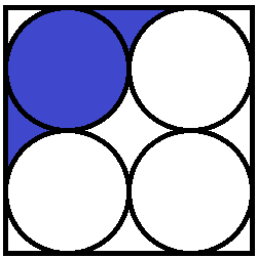
האולימפיאדה הארצית על שם פרופ' גיליס, תשע"ז

1. א. בציור הימני מופיע ריבוע, שבתוכו נמצאים 4 מעגלים. רדיוסי המעגלים שווים זה לזה, וכל מעגל משיק לשני מעגלים אחרים וגם לשתיים מצלעות הריבוע. מצאו את היחס בין שטח החלק הכחול לשטח החלק הלבן של הריבוע.

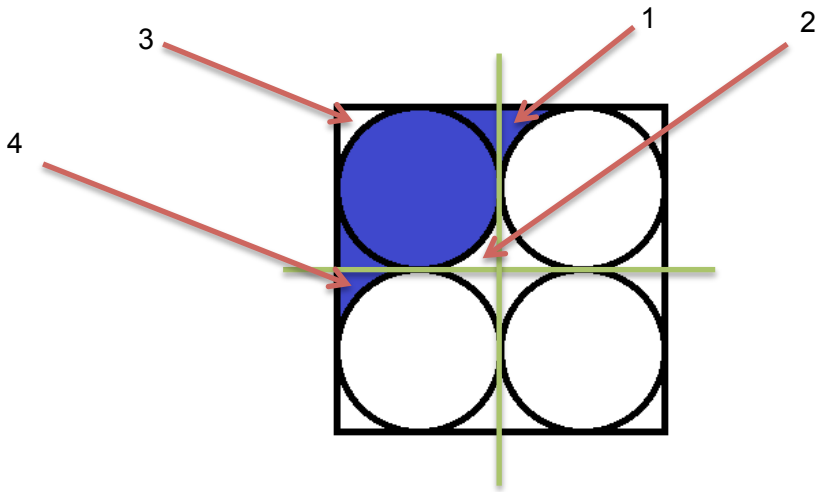
ב. בציור השמאלי מופיע משושה, שבתוכו נמצאים 6 מעגלים בעלי רדיוס זהה. כל מעגל משיק לשני מעגלים אחרים וגם לצלע אחת של המשושה, באמצעה. מצאו את היחס בין שטח החלק הכחול לשטח החלק הלבן של המשושה.



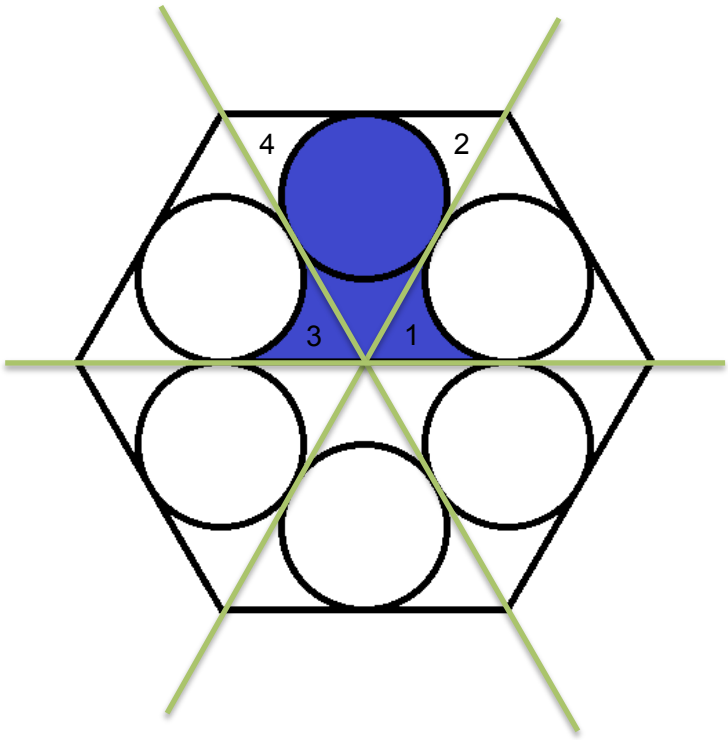


פתרון:

א. נחלק את הריבוע לארבעה רבעים שווים בשטחם כפי שמופיע מטה בעזרת שני הקווים הירוקים. כעת קל לראות שהשטח המסומן בחץ מספר 1 שווה לשטח המסומן בחץ מספר 2, והשטח המסומן בחץ מספר 3 שווה לשטח המסומן בחץ מספר 4. למעשה, שטח כל אחד מהחלקים 1,2,3 ו4 זהה, והוא בדיוק רבע מ[שטח ריבוע שאורך צלעו מחצית מצלע הריבוע הגדול, פחות שטח מעגל שרדיוסו רבע מצלע הריבוע הגדול]. לכן, שטח החלק הכחול הוא רבע מסך שטח הריבוע הגדול, ויחס השטחים הכחול והלבן הוא שליש.



ב. נחלק את המשושה לשישה חלקים שווים בשטחם. גם במקרה הזה ברור שכל החלקים 1,2,3 ו4 שווים בשטחם. לכן, שטח החלק הכחול הוא שישית מסך שטח המשושה הגדול, <u>ויחס השטחים הכחול והלבן הוא חמישית</u>.



2. נסמן ב-$P(n)$ את מכפלת הספרות של המספר n. לדוגמה, $P(1948) = 1 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 8 = 288$.
   1. חשבו את $P(1) + P(2) + P(3) + \cdots + P(2016)$.

<u>פתרון:</u> אם a, b, c, d הם ארבעה מספרים שלמים בין אפס לתשע, נסמן ב$[abcd]$ את המספר שספרת האחדות שלו היא d, העשרות היא c, המאות היא b, והאלפים היא a.

נחלק את הסכום המבוקש לסכום של שלושה סכומים: הסכום הראשון הוא

$P(1) + P(2) + P(3) + \cdots + P(999)$,

השני הוא

$$P(1000) + P(1001) + P(1002) + \cdots + P(1999),$$

והשלישי הוא

$$P(2000) + P(2001) + P(2002) + \cdots + P(2016).$$

משום שבכל איבר בסכום השלישי מופיעה הספרה אפס, ומשום שהופנקציה P היא אפס על כל איבר כזה, נסיק שהסכום השלישי הוא פשוט אפס.

כדי לחשב את הסכום הראשון והשני נשתמש שוב ושוב בעקרון הפשוט, לפיו לכל ארבעה מספרים שלמים בין אפס לתשע a, b, c, d מתקיים $P([abcd]) = d \cdot P([acb1])$.

נחשב את הסכום הראשון:

$$\begin{aligned}
&[P(1) + P(2) + P(3) + \cdots + P(999)] \\
&\quad = P(1) + P(2) + \cdots + P(9) + [P(10) + P(11) + \cdots + P(999)] \\
&\quad = (1 + 2 + \cdots + 9) + [P(11) + P(12) + \cdots + P(99)] \\
&\quad + [P(100) + P(101) + \cdots + P(999)] \\
&\quad = (1 + 2 + \cdots + 9) + (1 + 2 + \cdots + 9)[P(1) + P(2) + \cdots + P(9)] \\
&\quad + (1 + 2 + \cdots + 9)[P(10) + P(11) + \cdots + P(99)] \\
&\quad = 45 + 45^2 + (1 + 2 + \cdots + 9)(1 + 2 + \cdots + 9)(1 + 2 + \cdots + 9) \\
&\quad = 45 + 45^2 + 45^3
\end{aligned}$$

נחשב את הסכום השני:

$$\begin{aligned}
&[P(1000) + P(1001) + P(1002) + \cdots + P(1999)] \\
&\quad = (1 + 2 + 3 + \cdots + 9)[P(100) + P(101) + \cdots + P(199)] \\
&\quad = (1 + 2 + \cdots + 9)(1 + 2 + \cdots + 9)[P(10) + P(11) + \cdots + P(19)] \\
&\quad = (1 + 2 + \cdots + 9)(1 + 2 + \cdots + 9)(1 + 2 + \cdots + 9)P(1) = 45^3
\end{aligned}$$

ולכן הסכום המבוקש כולו הוא $45 + 45^2 + 2 \cdot 45^3 = 184320$.

2. מצאו את הערך המקסימלי של $\frac{P(n)}{n}$, כאשר $2016 \leq n \leq 5777$.

<u>פתרון:</u> נסמן את המספר המבוקש n עבורו היחס $\frac{P(n)}{n}$ מקסימלי ב[abcd]. ברור שאף אחת מספרותיו לא יכולה להיות אפס, כי אז המונה יהיה אפס, והיחס לא יהיה מקסימלי. נוכיח שלא ייתכן שאף אחת מהספרות היא 1. עבור a זה ברור כי $2016 \leq n \leq 5777$. נניח בשלילה שאכן אחת

מספרותיו של n היא אחת. נסמן בn' את המספר שמתקבל על ידי החלפת אחת מספרות האחת של n בספרה שתיים. נשים לב שמתקיים $2016 \le n' \le 5777$, וכמו כן היחס $\frac{P(n')}{n'}$ גדול מהיחס $\frac{P(n)}{n}$. את המונה הגדלנו פי שתיים, ואילו המכנה גדל בלכל היותר מאה. זו סתירה למקסימליות של n, ולכן לא ייתכן שאף אחת מספרותיו של n היא אחת.

אנחנו רוצים לחשב את הספרות עבורן המספר הבא מקסימלי:

$$\frac{P(n)}{n} = \frac{abcd}{1000a + 100b + 1c + d}$$

משום שמספר זה אינו אפס, במקום למצוא את הספרות שממקסמות אותו, אפשר למצוא את הספרות שממזערות את ההופכי שלו, זאת אומרת נרצה למזער את המספר:

$$\frac{n}{P(n)} = \frac{1000a + 100b + 10c + d}{abcd} = \frac{1000}{bcd} + \frac{100}{acd} + \frac{10}{abd} + \frac{1}{abc}$$

זהו סכום של ארבעה מספרם חיוביים, לכן אם נמצא ארבע ספרות שממזערות כל איבר בנפרד, בוודאי שהן ימזערו את הסכום כולו. נזכור שאנחנו יודעים שאף ספרה לא יכולה להיות אפס או אחת, ושהספרה a היא בין שתיים לחמש.

נתחיל בלהראות שלא ייתכן ש$a = 5$. נניח בשלילה ש$n = [5bcd]$, אז $b \le 7$. נסמן $n' = [4(b+2)cd]$ (זאת אומרת $n' = n - 1000 + 200$). כעת נחשב:

$$\begin{aligned}
\frac{n}{P(n)} - \frac{n'}{P(n')} &= \frac{5000 + 100b + 10c + d}{5bcd} - \frac{4000 + 100(b+2) + 10c + d}{4(b+2)cd} \\
&= \frac{20{,}000(b+2) + 400b(b+2) + 40c(b+2) + 4d(b+2)}{20(b+2)bcd} \\
&- \frac{20{,}000b + 500b(b+2) + 50cb + 5db}{20(b+2)bcd} \\
&= \frac{40{,}000 - 100b(b+2) - 10cb + 80c - db + 8d}{20(b+2)bcd} \\
&\ge \frac{40{,}000 - 6{,}300 - 630 - 63}{20(b+2)bcd} > 0
\end{aligned}$$

ולכן n' נותן יחס קטן יותר, בסתירה למינימליות. לכן, נסיק שהספרה a היא בין שתיים לארבע. שימו לב שכל איבר בסכום שאנחנו רוצים למזער מכיל את הספרות a, b, c, d רק במכנים, לכן ברור שככל שנציב ספרות גבוהות יותר נקבל איברים קטנים יותר בסכום. לכן, ברור שהמספר 4999 (עבורו כל ספרה מקבלת הערך הגבוהה ביותר שהיא יכולה לקבל) ייתן את האיברים הקטנים ביותר, וכך את הסכום הקטן ביותר.

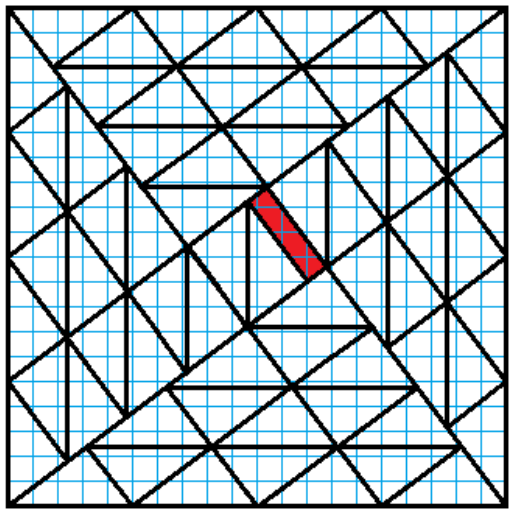
לכן, המספר המבוקש n הוא 4999, והיחס המבוקש הוא $\frac{P(n)}{n} = \frac{P(4999)}{4999} = \frac{4\cdot9\cdot9\cdot9}{4999} = \frac{2916}{4999}$.

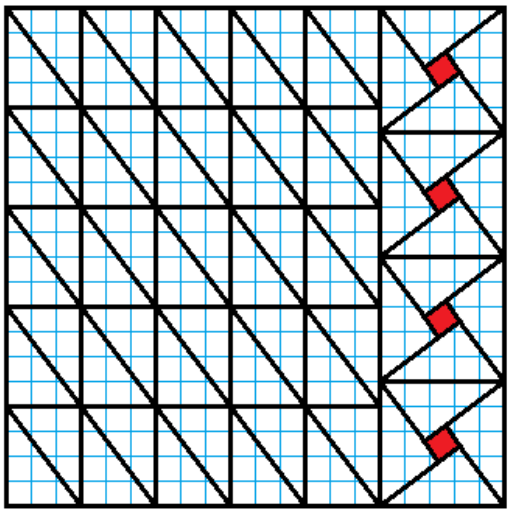
3. נתונה כמות גדולה של משולשים ישרי זווית חופפים. אורכי הצלעות בכל משולש הן 3, 4 ו 5. כמה משולשים כאלה, לכל היותר, אפשר למקם בתוך ריבוע 20×20, כך שהם לא יעלו זה על זה?

<u>פתרון:</u> שטח הריבוע הוא 400, שטח של כל משולש 6. נחלק את 400 ב6 עם שארית:

$$400 = 360 + 36 + 4 = 6\times66 + 4$$

לכן יכולים להיות לכל היותר 66 משולשים, כלומר שהשטח שלא מכוסה על ידי משולשים שווה 4. נציג שתי דוגמאות למצבים של 66 משולשים (כמובן שבשביל לפתור את השאלה מספיק למצוא דוגמה אחת):





4. שלושה מספרים רציונאליים p, q ו x מקיימים את המשוואה $p^2 - x\cdot q^2 = 1$. הוכיחו כי קיימים מספרים שלמים a ו b המקיימים $q = \frac{2ab}{a^2-xb^2}$ ו $p = \frac{a^2+xb^2}{a^2-xb^2}$.

<u>פתרון 1:</u> נניח שמצאנו שני מספרים שלמים כנדרש. אם $b = 0$ אז $q = 0$, $p = 1$, x יכול להיות כל מספר, ו a יכול להיות כל מספר שאינו אפס, וסיימנו. נניח אם כך ש$b \neq 0$. באופן דומה נניח ש$x \neq 0$. נגדיר מספר רציונאלי $c = \frac{a}{b}$. נחלק בנוסחאות עבור p ו q את המונה והמכנה בb^2, ונקבל רישום קצר יותר עבור הנוסחאות: $q = \frac{2c}{c^2-x}$ ו $p = \frac{c^2+x}{c^2-x}$, כאשר c רציונאלי. גם ההפך נכון: אם נרשום $c = \frac{a}{b}$ ונכפיל מונה ומכנה ב b^2 זה יחזיר אותנו לנוסחאות הקודמות. נציב את הנוסחאות החדשות בצד שמאל של המשוואה $p^2 - x\cdot q^2 = 1$, ונקבל שאכן מתקבל המספר 1:

$$p^2 - x \cdot q^2 = \left(\frac{c^2+x}{c^2-x}\right)^2 - x\left(\frac{2c}{c^2-x}\right)^2 = \frac{(c^2+x)^2 - x(2c)^2}{(c^2-x)^2}$$
$$= \frac{c^4 + 2c^2x + x^4 - 4c^2x}{c^4 + 2c^2x + x^4} = \frac{c^4 + 2c^2x + x^4}{c^4 + 2c^2x + x^4} = 1.$$

רואים שאם נחליף סימן לp, יוחלף גם סימן לq. עוד קל לראות שלכל ערך של p יש בדיוק שני ערכים $q = \pm\sqrt{\frac{p^2-1}{x}}$ שפותרים את המשוואה. לכן, מספיק להראות שכל הפתרונות הרציונאליים של המשוואה $p^2 - x \cdot q^2 = 1$ הם מהצורה $\mathrm{p} = \frac{c^2+x}{c^2-x}$ עבור c מספר רציונאלי כלשהו (כי עבור כל ערך של p מצאנו שני ערכים של q שמקיימים $p^2 - x \cdot q^2 = 1$).

את הנוסחה $\mathrm{p} = \frac{c^2+x}{c^2-x}$ אפשר לרשום גם בצורה

$$\mathrm{p}(c^2 - x) = c^2 + x$$

$$\mathrm{c}^2(p-1) = \mathrm{x}(p+1)$$

$$\mathrm{c}^2 = \mathrm{x} \cdot \frac{p+1}{p-1}$$

כלומר, p ניתן להצגה באופן הנדרש אם ורק אם $\mathrm{x} \cdot \frac{p+1}{p-1}$ הוא ריבוע של מספר רציונאלי. מצד שני, את המשוואה $p^2 - x \cdot q^2 = 1$ ניתן לרשום בצורה $p^2 - 1 = xq^2$, ולכן $q^2 = \frac{p^2-1}{x}$. כלומר p מקיים שהמספר $\frac{p^2-1}{x}$ הוא ריבוע של מספר רציונאלי. ניתן להכפיל ביטוי זה במספר הרציונאלי $\left(\frac{\mathrm{x}}{p-1}\right)^2$, ולקבל את התנאי השקול שהמספר $x \cdot \frac{\mathrm{p}+1}{p-1}$ הוא ריבוע של מספר רציונאלי, שזה בדיוק מה שרצינו להראות.

<u>פתרון 2:</u> נניח ש(p,q) היא נקודה במישור. המשוואה $p^2 - x \cdot q^2 = 1$ מייצגת היפרבולה במישור. על ההיפרבולה הזאת קל לנחש נקודה אחת:$(1,0)$. המטרה שלנו היא לנחש את כל הנקודות עם קואורדינאטות רציונליות. דרך הנקודה $(1,0)$ ונקודה (p,q) כלשהי ניתן להעביר ישר. אם הנקודה (p,q) רציונאלית, השיפוע של הישר יהיה רציונאלי. כל ישר עם שיפוע רציונאלי שעובר דרך $(1,0)$ מתואר על ידי המשוואה $\mathrm{p} = 1 - \mathrm{k} \cdot \mathrm{q}$ כאשר k מספר רציונאלי כלשהו. לכן, אם נבדוק את כל המספרים הרציונאליים, נמצא על ישרים אלה את כל הנקודות הרציונליות על ההיפרבולה.

במילים אחרות, כל נקודה רציונאלית (p,q) על ההיפרבולה היא פתרון של מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} p^2 - x \cdot q^2 = 1 \\ \mathrm{p} = 1 - \mathrm{k} \cdot \mathrm{q} \end{cases}$$

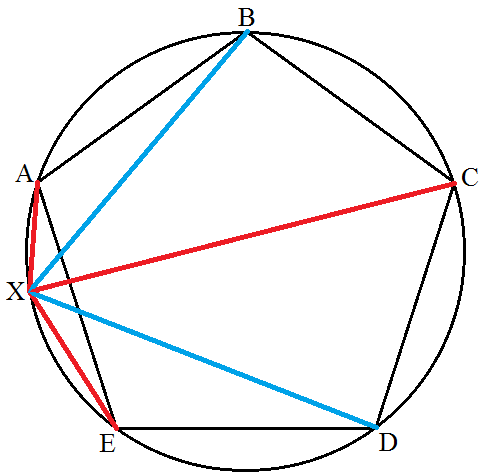
$$(1 - \mathrm{k} \cdot \mathrm{q})^2 - x \cdot q^2 = 1$$

$$1 - 2 \cdot \mathrm{k} \cdot \mathrm{q} + k^2 q^2 - x \cdot q^2 = 1$$

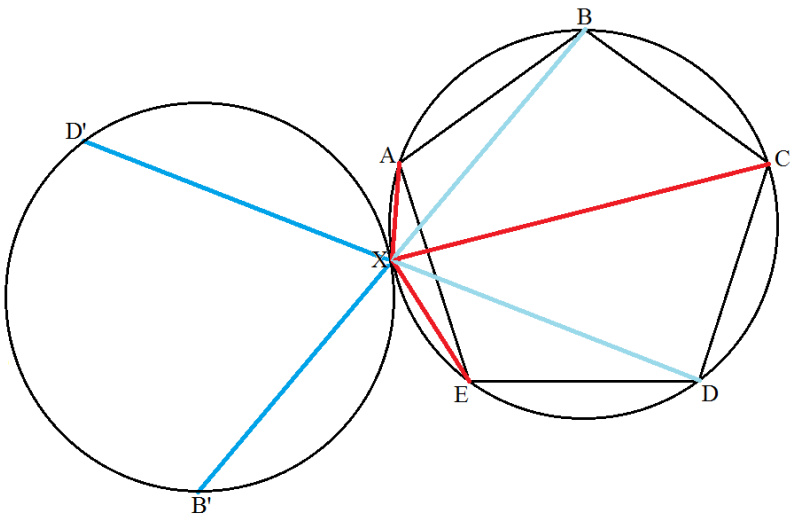
$$(k^2 - x)q^2 = 2 \cdot \mathrm{k} \cdot \mathrm{q}$$

למשוואה ריבועית זו יש שני שורשים: האחד $\mathrm{q} = 0$, שאותו כבר ניחשנו, ושורש נוסף $\mathrm{q} = \frac{2 \cdot \mathrm{k}}{k^2 - x}$, $p = 1 - kq = 1 - \frac{2k^2}{k^2 - x} = \frac{-k^2 - x}{k^2 - x}$. קל לראות שהנקודה (p, q) מתאימה אם ורק אם הנקודה $(-\mathrm{p}, \mathrm{q})$ מתאימה, לכן ניתן לרשום את התשובה גם בצורה: $p = \frac{k^2 + x}{k^2 - x}$, $q = \frac{2k}{k^2 - x}$. נזכר שk הוא מספר רציונאלי, זאת אומרת $\mathrm{k} = \frac{a}{b}$, כאשר a, b הם שני מספרים שלמים. נציב את זה בתשובה שקיבלנו ונכפיל מונה ומכנה בb^2, ונקבל $\mathrm{q} = \frac{2ab}{a^2 - xb^2}$, $\mathrm{p} = \frac{a^2 + xb^2}{a^2 - xb^2}$, שזה בדיוק מה שרצינו.

5. נתון מחומש משוכלל $ABCDE$. הנקודה X נמצאת על המעגל החוסם שלו, על גבי הקשת AE. הוכיחו כי $|AX| + |CX| + |EX| = |BX| + |DX|$ (כאשר $|AX|$ הוא אורך הקטע AX, וכך הלאה).



<u>פתרון 1:</u> ארבע הזוויות $\mathrm{AXE}, \mathrm{BXC}, \mathrm{CXD}, \mathrm{DXE}$ נשענות על קשתות שהן חמישית מעגל, לכן כולן שוות $\frac{180^\circ}{5}$. נשקף את חלקים של התמונה יחסית למשיק למעגל בנקודה X, כפי שמופיע מטה:



הקרניים XD', XB', XE, XC, XA מחלקות את המישור לחמש זוויות שוות. בכל אחת מהקרניים האלה נבנה ווקטור יחידה שיוצא מהנקודה X, שנסמן בv_1, v_2, v_3, v_4, v_5, בהתאמה. נסמן בY את הנקודה על המעגל המקורי, כך שXY הוא קוטר של המעגל. לכן:

$$\sphericalangle AXY = \sphericalangle XBY = \sphericalangle XCY = \sphericalangle XDY = \sphericalangle XEY = 90°$$

וההיטלים של Y לישרים DX, CX, BX, AX, EX מתקבלים בנקודות D, C, B, A, E בהתאמה.נתבונן במכפלה הסקלרית של XY עם הוקטורים v_1, v_2, v_3, v_4, v_5. מבחינת ערך מוחלט, מקבלים אורך של היטל, כלומר המרחקים מX לקודקודי המחומש. כאשר הזוויות חדות מקבלים מספר חיובי, וכאשר קהות מספר שלילי. לכן:

$$|AX| + |CX| + |EX| - |BX| - |DX| =< v_1, \overrightarrow{XY} > +< v_2, \overrightarrow{XY} > +< v_3, \overrightarrow{XY} > + < v_4, \overrightarrow{XY} > +< v_5, \overrightarrow{XY} >=< v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5, \overrightarrow{XY} >$$

אנחנו רוצים להראות שביטוי זה מתאפס. בשביל זה מספיק להוכיח שהוקטור

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5$$

הוא וקטור האפס. אכן, סיבוב בזווית $\frac{180°}{5}$ מעביר את v_1 לv_2, את v_2 לv_3,..., ואת v_5 לv_1. לכן, הוא מעביר את $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5$ לעצמו. אבל כל וקטור שאינו וקטור האפס משנה כיוון כאשר מסובבים אותו בזווית $\frac{180°}{5}$, והופך ולקטור אחר. לכן, זהו וקטור האפס והוכחנו את הדרוש.

<u>פתרון 2:</u> נזכיר את משפט תלמי: אם a, b, c, d הן צלעות של מרובע חסום במעגל (בסדר זה) e, f ו הם אלכסוניו, אז $|ac| + |bd| = |ef|$. נסמן את אורך הצלע של המחומש המשוכלל בs, ואת אורך האלכסון בl. ניישם את משפט תלמי לארבעה מרובעים חסומים:

מרובע XABE: $|XA| \cdot l + |XE| \cdot s = |XB| \cdot s$

מרובע XABC: $|XA| \cdot s + |XC| \cdot s = |XB| \cdot l$

מרובע XBCD: $|XC| \cdot l + |XB| \cdot s = |XD| \cdot s$

מרובע XCDE: $|XC| \cdot s + |XE| \cdot s = |XD| \cdot l$

מרובע XADE: $|XA| \cdot s + |XE| \cdot l = |XD| \cdot s$

נחבר את חמש הזהויות שקיבלנו, ונקבל

$$|AX| \cdot (2s + l) + |CX| \cdot (2s + l) + |EX| \cdot (2s + l) = |BX| \cdot (2s + l) + |DX| \cdot (2s + l)$$

לאחר שנחלק את שני צדי המשוואה ב$(2s + l)$ נקבל בדיוק את הזהות שרצינו להוכיח.

6. נסמן ב $\mathbb{Q}$ את קבוצת המספרים הרציונאליים. נתונה פונקציה $f:\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$, כלומר לכל שני מספרים רציונאליים x ו y מוגדר מספר רציונאלי $f(x,y)$. נתון ש:

- לכל 4 מספרים x_1,x_2,y_1,y_2, מתקיים: $f(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})\le\frac{f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2)}{2}$.
- $f(0,0)<0$.
- לכל זוג x,y של מספרים המקיימים $x^2+y^2>100$, מתקיים: $f(x,y)>1$.

הוכיחו שקיים מספר רציונאלי חיובי b, כך שלכל x,y מתקיים: $f(x,y)\ge b\cdot\sqrt{x^2+y^2}-\frac{1}{b}$.

<u>פתרון:</u> נשתמש ברישום ווקטורי בשביל לקצר רישום. את הנתון הראשון למשל נרשום באופן הבא: לכל שני וקטורים u,v מתקיים $f(\frac{u+v}{2})\le\frac{f(u)+f(v)}{2}$.

ראשית, נראה שאפשר להניח במקום $f(0,0)<0$ שמתקיים $f(0,0)=0$. נניח שהוכחנו את התרגיל עבור כל פונקציה g שמקיימת את התנאים הראשון והשלישי ומקיימת בנוסף $g(0,0)=0$.

ניקח פונקציה f שמקיימת את שלושת התנאים הנתונים. נסמן $k=-f(0,0)$, אז k מספר רציונאלי חיובי כלשהו. נגדיר פונקציה חדשה $g\left(u\right)=f\left(u\right)+k$. אז הפונצייה g מקיימת את התנאי הראשון והשלישי ומקיימת בנוסף $g(0,0)=0$. לפי ההנחה מצאנו כבר מספר רציונאלי חיובי b, כך שלכל וקטור u מתקיים: $g(u)\ge b\cdot|u|-\frac{1}{b}$. כעת נגדיר מספר רציונאלי חדש $b'=\frac{b}{1+kb}$. ברור שמתקיים:

$$0<b'<b$$

ולכן:

$$f(u)=g(u)-k\ge b\cdot|u|-\frac{1}{b}-k=b\cdot|u|-\left(\frac{1}{b}+k\right)=b\cdot|u|-\left(\frac{1+kb}{b}\right)$$
$$=b\cdot|u|-\frac{1}{b'}\ge b'\cdot|u|-\frac{1}{b'}$$

שזה בדיוק מה שרצינו. לכן די להוכיח את התרגיל תחת ההנחה $f(0,0)=0$.

<u>טענה 1:</u> לכל n וקטורים $v_1,v_2,..,v_n$ מתקיים $f(\frac{v_1+v_2+\cdots+v_n}{n})\le\frac{f(v_1)+f(v_2)+\cdots+f(v_n)}{n}$.

את הטענה הזו נוכיח באמצעות "אינדוקציה עקומה": נוכיח שאם היא נכונה עבור n כלשהו, אז היא נכונה גם עבור $2n$, ולאחר מכן נוכיח שאם היא נכונה עבור n היא נכונה גם עבור $n-1$. משום שעבור $n=1$ הטענה ברורה יש לנו בסיס לאינדוקציה, וכך תהיה זו הוכחה לכל n.

אם הטענה נכונה עבור n אז:

$$f\left(\frac{v_1+v_2+\cdots+v_{2n}}{2n}\right)$$
$$=f\left(\frac{\frac{1}{2}(v_1+v_2)+\frac{1}{2}(v_3+v_4)+\cdots+\frac{1}{2}(v_{2n-1}+v_{2n})}{n}\right)$$
$$\leq\frac{f\left(\frac{1}{2}(v_1+v_2)\right)+f\left(\frac{1}{2}(v_3+v_4)\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{2}(v_{2n-1}+v_{2n})\right)}{n}$$
$$=\frac{f(v_1)+f(v_2)+\cdots+f(v_{2n})}{2n}$$

ולכן הטענה נכונה עבור $2n$.

אם הטענה נכונה עבור n אז אפשר לרשום

$$f(v_1)+f(v_2)+\cdots+f(v_n)\geq n\cdot f\left(\frac{v_1+v_2+\cdots+v_n}{n}\right).$$

נציב $v_n=\frac{v_1+v_2+\cdots+v_{n-1}}{n-1}$, ואז מתקיים:

$$\frac{v_1+v_2+\cdots+v_{n-1}+v_n}{n}=\frac{v_1+v_2+\cdots+v_{n-1}+\frac{v_1+v_2+\cdots+v_{n-1}}{n-1}}{n}$$
$$=\frac{1}{n}(v_1+v_2+\cdots+v_{n-1})\left(1+\frac{1}{n-1}\right)$$
$$=\frac{1}{n}(v_1+v_2+\cdots+v_{n-1})\left(\frac{n}{n-1}\right)=\frac{v_1+v_2+\cdots+v_{n-1}}{n-1}$$

כעת נציב זאת ונקבל:

$$f(v_1)+f(v_2)+\cdots+f(v_{n-1})+f\left(\frac{v_1+v_2+\cdots+v_{n-1}}{n-1}\right)$$
$$\geq n\cdot f\left(\frac{v_1+v_2+\cdots+v_{n-1}}{n-1}\right)$$

ומזה נובע $\frac{f(v_1)+f(v_2)+\cdots+f(v_{n-1})}{n-1}\geq f\left(\frac{v_1+v_2+\cdots+v_{n-1}}{n-1}\right)$.

לכן, הטענה נכונה גם עבור $n-1$, והוכחנו שטענה 1 נכונה לכל n.

כעת, ניקח מספר חיובי $A\geq 1$ כך שלכל בחירת סימנים $f(\pm 10,\pm 10)\leq A$ (פשוט ניקח את A להיות המקסימום של ארבעת המספרים האלה והמספר 1 למשל). כל מספר רציונאלי

$$-10<x<10$$

ניתן לכתיבה באופן הבא: $x=\frac{10\cdot n+(-10)\cdot m}{n+m}$, כאשר n,m הם שני מספרים טבעיים (מספיק לקחת את המספרים $10-x$, ו$10+x$ ולהכפיל אותם במכנה המשותף שלהם). לכן:

$$f(x,10)=f\left(\frac{10\cdot n+(-10)\cdot m}{n+m},10\right)\leq\frac{n\cdot f(10,10)+m\cdot f(-10,10)}{n+m}$$
$$\leq\frac{n\cdot A+m\cdot A}{n+m}=A.$$

באופן דומה גם $f(x,-10)\leq A$, $f(10,x)\leq A$, וגם $f(-10,x)\leq A$.

אנו טוענים כי שתי הטענות הבאות נכונות:

<u>טענה 2:</u> אם וקטור v נמצא מחוץ לריבוע המלא $[-10,10]\times[-10,10]$ אז $f(v) \geq \frac{1}{15}\cdot|v|$.

<u>טענה 3:</u> אם וקטור v נמצא בתוך הריבוע המלא $[-10,10]\times[-10,10]$ אז $f(v) \geq -A$.

אם נוכיח ששתי הטענות נכונות הרי שנסיים את ההוכחה: נזכור שאנחנו רוצים להוכיח שקיים מספר רציונאלי b , כך שלכל וקטור v מתקיים התנאי

$$f(v) \geq b\cdot|v| - \frac{1}{b}.$$

ניקח $0 < b \leq min\left\{\frac{1}{1+A}, \frac{1}{15}\right\}$, ובפרט מתקיים $1 - \frac{1}{b} \leq -A$. כעת אם v מחוץ לריבוע אז

$$b\cdot|v| - \frac{1}{b} \leq b\cdot|v| \leq \frac{|v|}{15} \leq f(v)$$

כאשר במעבר הראשון השתמשנו בכך ש$\frac{1}{b}$ מספר חיובי, במעבר השני בכך שבחרנו את b כך ש$b \leq \frac{1}{15}$, ובמעבר השלישי בטענה 2. לכן, התנאי מתקיים מחוץ לריבוע. אם v בתוך הריבוע אז:

$$b\cdot|v| - \frac{1}{b} \leq b\cdot 15 - \frac{1}{b} \leq 1 - \frac{1}{b} \leq -A \leq f(v)$$

(מטענה 3), ולכן גם במצב זה התנאי מתקיים. לכן, די להוכיח שטענה 2 וטענה 3 נכונות.

הוכחת טענה 2: ניקח וקטור $v = (x, y)$ שנמצא מחוץ לריבוע. נגדיר $M = max\{|x|, |y|\}$, וכמובן שמתקיים $M > 10$. נגדיר וקטור חדש $u = \frac{10}{M}v$. אז u נמצא על שפת הריבוע, וגם לו קואורדינטות רציונאליות. נזכור שM מספר רציונאלי חיובי, לכן ניתן לרשום $M = \frac{a}{b}$ כאשר a, b שני מספרים שלמים חיוביים, ונשים לב שמתקיים:

$$u = \frac{10}{M}v = \frac{10}{M}v + \frac{M-10}{M}(0,0) = \frac{10b\cdot v + (a-10b)\cdot(0,0)}{a}$$

משום ש$M > 10$ מתקיים $a - 10b$, זאת אומרת שני המקדמים $a - 10b, 10b$ שלמים חיוביים, ולכן נוכל להשתמש בטענה 1, ולקבל:

$$f(u) = f\left(\frac{10b\cdot v + (a-10b)\cdot(0,0)}{a}\right) \leq \frac{10bf(v) + (a-10b)\cdot f(0,0)}{a}$$
$$\leq \frac{10bf(v)}{a} = 10\cdot\frac{b}{a}\cdot f(v)$$

סכום ריבועי הקואורדינטות של u הוא לפחות 100 (כי לפחות אחת הקואורדינטות היא ± 10), ולכן לפי הנתון $f\left(u\right) > 1$. לכן $f(v) \geq \frac{1}{10}\cdot\frac{a}{b}\cdot f(u) = \frac{M}{10}\cdot f(u) \geq \frac{M}{10}$. מתקיים גם

$$\left|v\right| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{2M^2} = 2\sqrt{M}$$

זאת אומרת $M \geq \frac{|v|}{\sqrt{2}}$, ולכן $f(v) \geq \frac{M}{10} \geq \frac{|v|}{10\sqrt{2}} \geq \frac{|v|}{15}$, והוכחנו שטענה 2 נכונה.

הוכחת טענה 3: ניקח וקטור $v = (x, y)$ שנמצא בתוך הריבוע. שוב נגדיר $M = max\{|x|, |y|\}$, וכמובן שמתקיים $M \leq 10$. אם $v = (0,0)$ הטענה ברורה, לכן נניח ש$M > 10$. נגדיר וקטור חדש $w = -\frac{10}{M}v$. אז w נמצא על שפת הריבוע. חישוב פשוט מראה כי $M\cdot w + 10\cdot v$ הוא

וקטור האפס. נזכור שM מספר רציונאלי חיובי, לכן ניתן לרשום $M = \frac{a}{b}$ כאשר a, b שני מספרים שלמים חיוביים, ונשים לב שמתקיים: $M \cdot w + 10 \cdot v = \frac{a \cdot w + 10b \cdot v}{b}$, ולכן גם $a \cdot w + 10b \cdot v$ הוא וקטור האפס. כמובן שאז גם $\frac{a \cdot w + 10b \cdot v}{a + 10b}$ הוא וקטור האפס. נשתמש שוב בטענה 1 ונקבל:

$$0 = f(0,0) = f\left(\frac{a \cdot w + 10b \cdot v}{a + 10b}\right) \leq \frac{a \cdot f(w) + 10b \cdot f(v)}{a + 10b}$$

ולכן $a \cdot f(w) + 10b \cdot f(v) \geq 0$, ומכן שמתקיים $f(v) \geq -\frac{M}{10} \cdot f(w)$. אבל הוכחנו שעל שפת הריבוע מתקיים $f(w) \leq A$, לכן $-f(w) \leq -A$. בנוסף, $1 > \frac{M}{10} > 0$, ולכן,

$$f(v) \geq -\frac{M}{10} \cdot f(w) \geq -A$$

וזה מוכיח את טענה 3.

7. נתונה טבלה בת m שורות ו n עמודות. בכל משבצת בטבלה כתוב מספר שלם. רחבעם ואשר משחקים במשחק הבא: בתחילת כל תור, רחבעם רשאי לבחור שתי עמודות כלשהן ולהחליף ביניהן. לאחר מכן, רחבעם בוחר מספר שורות ומוסיף בתחתית הטבלה שורה חדשה, שכל אחד מאיבריה הוא סכום האיברים שנמצאים מעליו בשורות שנבחרו. כעת, אשר בוחר אחת מבין השורות שנבחרו על ידי רחבעם, ומוחק אותה מהטבלה (כך, בסוף כל תור של אשר יש בדיוק m שורות בטבלה). בכך מסתיים התור ומתחיל תור חדש.

לדוגמה, אם בטבלה כתוב:

1 1 1

6 5 4

9 8 7

אז רחבעם יכול לבחור להחליף בין העמודה הראשונה והשלישית, ולקבל את הטבלה הבאה:

1 1 1

4 5 6

7 8 9

כעת, רחבעם יכול לבחור את השורות הראשונה והשנייה, ולקבל את הטבלה הבאה:

1 1 1

4 5 6

7 8 9

5 6 7

כעת, אשר בתורו יכול לבחור למחוק את השורה השנייה, ולקבל את הטבלה הבאה:

1 1 1

7 8 9

הראו שרחבעם תמיד יכול לגרום לכך, שלאחר מספר סופי של תורות, כל איבר בטבלה לא יהיה קטן מהאיבר שעומד מימינו.

<u>פתרון:</u> נראה שרחבעם יכול להגיע למצב הרצוי שני שלבים, שכל אחד מהם ניתן לביצוע במספר סופי של תורות.

בשלב הראשון רחבעם לא יחליף בין עמודות בשום תור. בסוף שלב זה הוא יגיע למצב בו: ישנה עמודה i_1 שמקיימת שבכל שורה, המספר שעומד בעמודה זו אינו גדול מאף מספר שעומד באותה שורה. ישנה עמודה i_2 שמקיימת שבכל שורה, המספר שעומד בעמודה זו אינו גדול מאף מספר שעומד באותה שורה אלא אם הוא בעמודה i_1. ישנה עמודה i_3 שמקיימת שבכל שורה, המספר שעומד בעמודה זו אינו גדול מאף מספר שעומד באותה שורה אלא אם הוא בעמודה i_1 או i_2. וכך הלאה.

בתור הראשון בשלב השני רחבעם יעביר את העמודה i_1 להיות הימנית ביותר, ויעתיק לתחתית הטבלה את השורה האחרונה. כך, לא משנה איזו שורה ימחק אשר, עדיין העמודה הימנית ביותר תקיים את התנאי שקיימה לפני כן העמודה העמודה i_1.

בתור השני בשלב השני רחבעם יעביר את העמודה i_2 להיות השנייה מימין, ויעתיק לתחתית הטבלה את השורה האחרונה. כך, לא משנה איזו שורה ימחק אשר, עדיין העמודה השנייה מימין תקיים את התנאי שקיימה לפני כן העמודה העמודה i_2.

בתור הבא יעביר את העמודה i_3. להיות השלישית מימין, וכך הלאה. בסוף שלב זה תגיע הטבלה למצב הרצוי.

ברור שהשלב השני ניתן לביצוע במספר סופי של צעדים (לכל היותר $n-1$ צעדים). נותר להוכיח שאת השלב הראשון ניתן גם כן לבצע במספר סופי של צעדים.

נניח שנצליח להגיע למצב, שבכל שורה המספר בעמודה מסוימת i קטן או שווה למספר בעמודה אחרת j. מצב זה ישמר כל עוד לא יחליף רחבעם עמודות, זאת אומרת כל עוד לא הסתיים השלב הראשון. לכן, רחבעם יוכל להתעלם מהשורה i, ולהסתכל על הטבלה בת $n-1$ העמודות שתתקבל כך. לכן, אם יידע רחבעם לפתור את הבעיה (במספר סופי של תורות) עבור המצב בו ישנן שתי עמודות בלבד, יידע לעשות זאת עבור הטבלה כולה. לכן, מספיק לפתור את השאלה עבור טבלה בת שתי עמודות.

שורה i היא זוג מספרים (x_i, y_i), כאשר x_i הוא המספר שרשום בעמודה השמאלית, וy_i הוא המספר שרשום בעמודה הימנית. לכל שורה נגדיר מספר חדש $z_i = x_i - y_i$. נרצה להגיע למצב בו או שלכל i מתקיים z_i אי שלילי, או שלכל i מתקיים z_i אינו חיובי. אם עוד לא הגענו למצב כזה, אז יש שורות עבורן z_i חיובי, ויש שורות עבורן z_i שלילי. רחבעם ייקח שורות i וj כך שz_i הוא הכי גדול (וחיובי) וz_j הוא הכי קטן (ושלילי), ויחבר אותן בתחתית הטבלה. בשורה החדשה ההפרש הוא $z = z_i + z_j$, כלומר קטן ממש מz_i וגדול ממש מz_j. אשר ייאלץ למחוק את השורה הi או השורה

הj, כלומר שורה עם z_k הכי קטן או הכי גדול. עכשיו יכול לקרות אחד מהדברים הבאים: או שz_i הכי גדול יקטן, או שz_j הכי קטן יגדל, או שהיו l מספרי z הכי גדולים ועכשיו יש רק $l-1$, או שהיו t מספרי z הכי קטנים ועכשיו יש רק $t-1$. בכל מקרה, מכיוון ש$l+t$ קטן או שווה לכמות השורות n, אז תוך פחות מn מהלכים או שz_i הכי גדול יקטן, או שz_j הכי קטן יגדל. אבל יש רק n מספרים שלמים, לכן תהליך זה לא יימשך לנצח, זאת אומרת ניתן להגיע למצב בו או שלכל i מתקיים z_i אי שלילי, או שלכל i מתקיים z_i אינו חיובי.

בהצלחה!