מכון ויצמן למדע
WEIZMANN INSTITUTE OF SCIENCE

<u>פתרונות האולימפיאדה הארצית על שם פרופ' גיליס, תשע"ט</u>

1. בגן ילדים מתקיימים שלושה חוגים: ג'ודו, חקלאות ומתמטיקה. כל ילד משתתף בחוג אחד בדיוק ובכל חוג יש לפחות משתתף אחד.

מספר הילדים בגן הוא 32.

ביום שישי הגננת אספה 6 ילדים שיסדרו את הכיתה. הגננת ספרה וגילתה כי בדיוק חצי מתלמידי החוג לג'ודו, רבע מתלמידי החוג לחקלאות ושמינית מתלמידי החוג למתמטיקה נרתמו למשימה.

כמה תלמידים יש בכל חוג?

<u>תשובה</u>: 4 תלמידי ג'ודו, 4 תלמידי חקלאות, 24 תלמידי מתמטיקה.

<u>פתרון</u>: נסמן את מספר התלמידים בחוג ג'ודו ב-J, מספר התלמידים בחוג חקלאות ב-A ומספר התלמידים בחוג מתמטיקה ב-M . אז

$$J + A + M = 32$$

בסידור הכיתה השתתפו בדיוק חצי מתלמידי החוג לג'ודו, רבע מתלמידי חוג חקלאות ושמינית מתלמידי מתמטיקה.

כלומר,

$$J/2 + A/4 + M/8 = 6$$

קיבלנו 2 משוואות בשלושה נעלמים, אך חשוב לזכור שאנו מעוניינים רק בפתרונות **שלמים וחיוביים**.

נשים לב כי המספר J מתחלק ב-2, המספר A מתחלק ב-4 והמספר M מתחלק ב-8. נסמן:

$$J' = J/2, A' = A/4, M' = M/8$$

נשכתב את המשוואות

$$\begin{cases} 2J' + 4A' + 8M' = 32 \\ J' + A' + M' = 6 \end{cases}$$

נחלק ב-2 את שני האגפים של המשוואה הראשונה ונקבל

$$\begin{cases} J' + 2A' + 4M' = 16 \\ J' + A' + M' = 6 \end{cases}$$

עכשיו נחסיר את המשוואה השנייה מהראשונה ונקבל:

$$A' + 3M' = 10$$

מכיוון שמדובר בפתרון בשלמים חיוביים, מתקיים:

$$A' + M' < 6, M' \leq 3 \Rightarrow 4 < 2M', \; M' \leq 3 \Rightarrow 2 < M' \leq 3$$

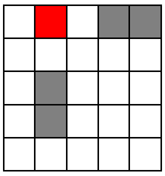
לכן יש לנו רק אפשרות אחת לערך של M' וזה $M' = 3$.

נקבל

$$\mathrm{M}' = 3, \mathrm{A}' = 1, \mathrm{J}' = 2$$

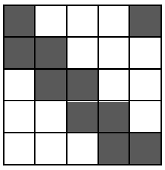
מכאן ש-

$$\mathrm{M} = 24, \mathrm{A} = 4, \mathrm{J} = 4.$$



2. נתון לוח משבצות 5×5 המחולק למשבצות 1×1. שתי משבצות נקראות **קשורות** אם הן נמצאות באותה שורה או באותה עמודה, והמרחק בין מרכזי המשבצות הוא 2 או 3. לדוגמה, בציור מסומנות בצבע אפור כל המשבצות הקשורות למשבצת האדומה.

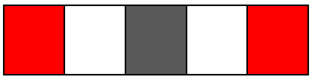
סמי מקבל לוח לבן, ורוצה לסמן עליו כמה שיותר משבצות שאף שתיים מהן אינן קשורות זו לזו. מהי הכמות המרבית של משבצות שהוא יכול לסמן?



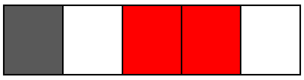
<u>פתרון</u>: בציור מסומנות 10 משבצות, שאף שתיים מהן לא קשורות. האם אפשר לסמן יותר משבצות?

נתבונן בשורה ספציפית.

(א) אם מסמנים את המשבצת המרכזית, אז אי-אפשר לסמן את המשבצות הקיצוניות בשורה זו כי הן קשורות אליה. מבין שתי המשבצות האחרות אפשר לסמן רק משבצת אחת, כי הן קשורות זו לזו. לכן אפשר לסמן רק 2 משבצות בשורה במקרה זה.



(ב) אם מסמנים איזושהי משבצת קיצונית, בתחילת שורה או בסוף שורה, אז יש שתי משבצות במרחקים 2 ו-3 ממנה שאסור לסמן כי הן קשורות אליה. מבין שתי המשבצות שנשארו ניתן לסמן רק משבצת אחת, כי הן קשורות זו לזו. גם במקרה זה אפשר לסמן 2 משבצות בסה"כ ולא יותר.



(ג) אם אנחנו לא באף אחד מבין המקרים הקודמים, אז מותר לסמן רק את המשבצות השנייה והרביעית בשורה, אבל לא את שתיהן בו-זמנית כי הן קשורות, לכן מותר לסמן רק משבצת אחת.

ובכן, בכל מקרה אי-אפשר לסמן בשורה יותר משתי משבצות. ולכן באף שורה לא יהיו יותר מ-2 משבצות מסומנות, לכן בטבלה לא יכולות להיות יותר מ-10 משבצות מסומנות.

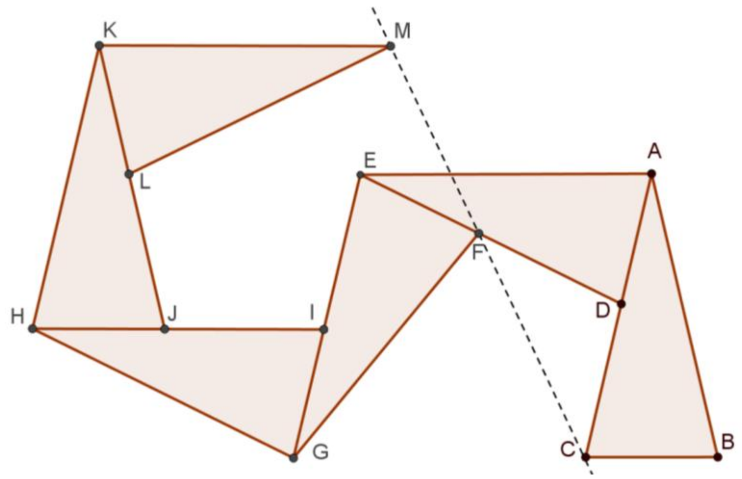
הערה. אנו רוצים להציע לקוראים לחשוב על גרסה יותר מעניינת של השאלה: הטבלה היא בגודל 101×101, ובהגדרה של משבצות קשורות במקום המרחקים 2 ו-3 משתמשים במרחקים 50 ו-51.
(הפתרון הבא תקף גם להערה)

<u>פתרון נוסף</u>: נמספר את השורה כך:

1	3	5	2	4

נשים לב שכל שני מספרים עוקבים (ציקלית) לא יכולים להיות צבועים ביחד. לכן, ניתן לסמן רק 2 מתוכן. פתרון זה גם תקף למקרים גדולים יותר (כמו בהערה)

3. שישה משולשים שווי שוקיים חופפים הוצמדו זה לזה כמתואר בציור. הראו כי הנקודות C, F ו- M נמצאות על ישר אחד.



__פתרון:__

טענה 1: BAEG טרפז שווה שוקיים.

הוכחה: נשים לב כי המשולשים ABE ו-EGA חופפים מכיוון ששניהם שווי שוקיים עם שוקיים שוות ($AB = AE = EG$) וזוויות הראש גם שוות מפני ש-

$$\measuredangle BAE = \measuredangle BAC + \measuredangle DAE = \measuredangle AED + \measuredangle FEG = \measuredangle AEG$$

במשולשים חופפים הגבהים מקודקודים מתאימים שווים ולכן המרחק מ-B ל-AE שווה למרחק מ-G ל-AE ולכן AE מקביל ל-BG ולכן BAEG טרפז. ברור כי $AB = EG$ ולכן הטרפז הוא טרפז שווה שוקיים.

טענה 2: הנקודות B, C, G נמצאות על ישר.

הוכחה: $\measuredangle BCA = \measuredangle CAE$ ולכן BC מקביל ל-AE אבל על פי טענה 1 BG מקביל ל-AE אבל יש רק ישר אחד העובר דרך ב-B ומקביל ל-AE ולכן B, C, G על ישר.

מטיעונים דומים נקבל כי גם GHKM טרפז שווה שוקיים ו-G, E, M על ישר.

נשים לב כי CAEG מקבילית, זאת מפני שהוכחנו כי AE מקביל ל-CG אבל $EG = AB = AC$.

טענה 3: $ME = AD$.

הוכחה: נשים לב כי הטרפזים BAEG ו-GHKM חופפים, זאת מפני שהם נוצרו בדיוק באותה צורה משלושה משולשים שווי שוקיים וכל המשולשים חופפים. מהטרפזים החופפים נסיק כי $BG = MG$ ולכן מקבלים:

$$ME = MG - GE = BG - AE = BG - CG = BC = AD.$$

עכשיו בשביל לסיים את השאלה נוכיח כי $\measuredangle DFC = \measuredangle EFM$.

מטענה 3 נובע כי המשולש FEM שווה שוקיים, בנוסף ברור כי המשולש CDF שווה שוקיים מכיוון $FD = EF - DE = AD - AC = CD$.

הזווית $\measuredangle ADE$ היא זווית חיצונית למשולש CDF ולכן
$\measuredangle ADE = \measuredangle CFD + \measuredangle FCD$ אבל $\measuredangle CFD = \measuredangle FCD$ ולכן

$\measuredangle DFC = \frac{1}{2}\measuredangle ADE$. באופן דומה $\measuredangle MFE = \frac{1}{2}\measuredangle FEG$ אבל
$\measuredangle FEG = \measuredangle ADE$, מש"ל.

4. המספר 1 רשום על הלוח 9999 פעמים. מותר לנו לבצע את הפעולות הבאות:

- למחוק מהלוח ארבעה מספרים מהצורה x, x, y, y ולרשום על הלוח את המספרים $x + y, x - y$. אין חשיבות למיקום המספרים שנמחקו או שנכתבו.
- למחוק מהלוח את המספר 0 בכל מקום שבו הוא רשום.

האם ייתכן שנגיע למצב שבו:

א. רק מספר אחד רשום על הלוח?

ב. לכל היותר שלושה מספרים רשומים על הלוח?

<u>פתרון</u>: בשאלות כאלה מאוד עוזר לשים לב לדברים שנשמרים כאשר עושים את הפעולות. דבר אחד שנשמר הוא הזוגיות של סכום המספרים, אם מחקנו 0 זה לא משנה את הסכום. ואם החלפנו את x, x, y, y ב $x + y, x - y$ הסכום קטן ב $2x + 2y - (x + y + x - y) = 2y$ ולכן זוגיות הסכום לא השתנתה. נניח כי הגענו למצב שבו רשום רק מספר אחד על הלוח, נסתכל על הפעולה האחרונה שביצענו שהיא לא מחיקת 0, אחריה נותר רק מספר אחד שהוא לא 0 על הלוח ולכן לפניה היו אפסים על הלוח והמספרים x, x, y, y אז הסכום היה $2x + 2y$ וזה מספר זוגי, אבל הסכום בהתחלה הוא 9999 והוא אי זוגי. זה פותר את סעיף א'.

בשביל לפתור את סעיף ב' נצטרך לשים לב לדבר נוסף אשר נשמר כאשר אנו מבצעים את הפעולות, סכום הריבועים של המספרים על הלוח, נוכיח שזה אכן נשמר:

למחוק 0 בוודאי לא משנה את סכום הריבועים. אם אנחנו מחליפים את x, x, y, y ב- $x + y, x - y$ אז סכום הריבועים משתנה ב $2(x^2 + y^2) - (x + y)^2 - (x - y)^2 = 0$. ולכן סכום הריבועים נשמר.

סכום הריבועים בהתחלה הוא 9999. אם אפשר להגיע למצב בו יש 3 מספרים על הלוח לכל היותר אז נקבל ש 9999 הוא סכום 3 ריבועים (אולי חלקם 0 אם על הלוח יש פחות מ-3 מספרים). שארית החלוקה של 9999 ב-8 היא 7 ולכן טענת העזר מראה שזה לא ייתכן.

טענת עזר: סכום של 3 ריבועים אף פעם לא שקול ל-7 מודולו 8.

הוכחה: נשים לב ששאריות החלוקה של a^2 ב-8 הן 0,1,4. זה נכון כי אם a זוגי אז a^2 מתחלק ב-4. ואם a אי זוגי אז $a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1)$ הוא מכפלה של 2 מספרים זוגיים עוקבים ולכן מתחלק ב-8. ולכן a^2 שקול ל-1 מודולו 8.

סכום של 3 מספרים שכל אחד מהם הוא אחד מבין 0,1,4 לא יכול להיות שווה ל-7 והוא בין 0 ל-12 ולכן לא קיימים שלושה ריבועים שסכומם שקול ל-7 מודולו 8.

5. גיא קיבל 17 קלפים, שעל כל אחד מהם רשום מספר שלם. המספרים לא בהכרח חיוביים ולא בהכרח שונים זה מזה. גיא שם לב שלכל קלף, אם מעלים את המספר הרשום עליו בריבוע, מקבלים את סכום המספרים הרשומים על הקלפים האחרים.

מה האפשרויות לקלפים שקיבל גיא? (כלומר: לכל אפשרות, אילו מספרים מופיעים וכמה פעמים מופיע כל מספר.)

<u>תשובה:</u>

האפשרויות הן:

- 17 קלפים שעל כולם רשום 16.
- 17 קלפים שעל כולם רשום 0.
- 5 קלפים שעליהם רשום -2 ו- 12 קלפים שעליהם רשום 1.
- 5 קלפים שעליהם רשום -6 ו- 12 קלפים שעליהם רשום 5.

<u>פתרון:</u> נסמן ב-$x_1, \dots, x_{17}$ את המספרים שרשומים על הקלפים, ונסמן גם ב- $S = x_1 + \cdots + x_{17}$ את סכום המספרים. אז את התנאים על ריבועי המספרים שעל הקלפים ניתן לרשום כמשוואות הבאות:

$$\begin{aligned} x_1^2 &= S - x_1, \\ x_2^2 &= S - x_2, \\ &\vdots \\ x_{17}^2 &= S - x_{17} \end{aligned}$$

במילים אחרות, כל המספרים שעל הקלפים הם פתרונות למשוואה הריבועית $x^2 + x - S = 0$. למשוואה ריבועית זו יש לכל היותר 2 פתרונות שונים, לכן מבין המספרים $x_1, \dots, x_{17}$ יש לכל היותר שני מספרים שונים a ו- b. אם כל המספרים זהים ושווים ל- a אז $S = 17a$ ולכן $a^2 = 16a$ כלומר $a = 0$ או $a = 16$ ואלה פתרונות: $x_1 = \cdots = x_{17} = 0$ או $x_1 = \cdots = x_{17} = 16$. אחרת יש שני מספרים שונים, והם בהכרח שני הפתרונות השונים של המשוואה $x^2 + x - S = 0$ ומכאן שמנוסחאות ויאטה (נוסחת הטרינום) סכומם -1 כלומר הם a ו- $-1 - a$.

לשם הנוחות נסמן ב- $N = 17$ את מספר הקלפים שקיבל גיא ונסמן גם $u = 1 - 2n$.

נניח שיש n קלפים שרשום עליהם a ו- $N - n$ קלפים שרשום עליהם $-1 - a$. אז מתקיימת המשוואה

$$a^2 = (n-1)a + (N-n)(-1-a) = (2n - N - 1)a + n - N$$

כלומר

$$a^2 + (N+u)a + N + \frac{u-1}{2} = 0$$

קיבלנו כי המספרים שיכולים להיות על הקלפים הם בדיוק הפתרונות למשוואה הזו עבור $0 \leq n \leq N$. מנוסחת השורשים, למשוואה זו יש פתרון שלם בדיוק כאשר הביטוי

$$(N+u)^2 - 4\left(N + \frac{u-1}{2}\right) = (\mathrm{N}+\mathrm{u})^2 - 4\mathrm{N} - 2\mathrm{u} + 2$$
$$= \mathrm{u}^2 + (2N-2)u + 2 + N^2 - 4N$$

הוא ריבוע שלם. נרשום זאת כך:

$$(u+N-1)^2 - (N-1)^2 + 2 + N^2 - 4N = (u+N-1)^2 - 2N + 1$$
$$= \Delta^2$$

כלומר, קיבלנו כי

$$.2N - 1 = (u+N-1)^2 - \Delta^2 = (u+N-1+\Delta)(u+N-1-\Delta)$$

במקרה שלנו $N = 17$ ולכן $(u+16-\Delta)(u+16+\Delta) = 33 = 3 \cdot 11$, כאשר $u = 1 - 2n$ הוא מספר שלילי אי-זוגי שגדול מ- -34.

במשוואה האחרונה רשמנו את $3 \cdot 11$ כמכפלה של שני מספרים שלמים, ולכן האפשרויות לגורמים הן $(1,33), (-1,-33), (3,11), (-3,-11)$. נחלץ את u מכל אחת ממערכות המשוואות שמתקבלת בנפרד:

$$\begin{cases} u+16+\Delta = 1 \\ u+16-\Delta = 33 \end{cases} \rightarrow u = \frac{34-32}{2} = 1$$
$$\begin{cases} u+16+\Delta = 3 \\ u+16-\Delta = 11 \end{cases} \rightarrow u = \frac{14-32}{2} = -9$$
$$\begin{cases} u+16+\Delta = -1 \\ u+16-\Delta = -33 \end{cases} \rightarrow u = \frac{-34-32}{2} = -33$$
$$\begin{cases} u+16+\Delta = -3 \\ u+16-\Delta = -11 \end{cases} \rightarrow u = \frac{-34-14}{2} = -24$$

מבין הפתרונות הנ"ל היחידים שמקיימים את התנאים ש- u אי זוגי שלילי וגדול מ- -34 הם $u = -33$ ו-$u = -9$ שעבורם $n = 17$ ו-$n = 5$ בהתאמה כי $n = \frac{1-u}{2}$. אם $n = 17$ אז על כל הקלפים רשום אותו מספר ובמקרה הזה כבר טיפלנו. אם $n = 5$ אז המשוואה שמקיים a היא המשוואה הריבועית

.

$$a^2 + 8a + 12 = (a+2)(a+6) = 0$$

כלומר, הפתרונות עבור a במקרה זה הם $a = -2$ ואז $-1 - a = 1$ או $\mathrm{a} = -6$ ואז $-1 - a = 5$.

סה"כ האפשרויות הן:

- על כל הקלפים רשום 16.
- על 5 קלפים רשום -2 ועל השאר רשום 1.
- על 5 קלפים רשום -6 ועל השאר רשום 5.

לסיום, נוודא שאלה אכן פתרונות: $4\cdot(-2)+12\cdot 1=12-8=4=2^2$ וכן $5\cdot(-2)+11\cdot 1=11-10=1^2$ ולכן האפשרות השנייה היא פתרון.

$4\cdot(-6)+12\cdot 5=60-24=36=(-6)^2$ וכן $11\cdot 5+5\cdot(-6)=55-30=25=5^2$ ולכן גם האפשרות האחרונה היא פתרון.

6. קבוצת מספרים שלמים נקראת אגדית, אם ניתן להגיע ממנה לכל מספר שלם בעזרת כמות כלשהי של פעולות מהסוג הבא:

אם המספרים x, y נמצאים בקבוצה, ניתן להוסיף לה את המספר $xy - y^2 - y + x$.

הוכיחו שכל קבוצה אגדית מכילה לפחות 8 מספרים.

פתרון:

תחילה נבחין בפירוק

$$xy - y^2 - y + x = (x-y)(y+1)$$

נבדוק כיצד ניתן לקבל בדרך זו מספר אי פריק p (מבחינתנו, הכוונה למספר שהערך המוחלט שלו הוא ראשוני או 1):

$$(x-y)(y+1) = p$$

מכיוון שהפירוקים היחידים של p הינם $p = p \cdot 1$ ו- $p = (-p) \cdot (-1)$, סכום הגורמים בפירוק לעיל שווה ל- $p + 1$ או $-p - 1$. מצד שני, סכום זה הינו

$$x - y + y + 1 = x + 1$$

<u>מקרה א -</u> $x + 1 = p + 1$:
במקרה זה $x = p$, כלומר ש- p היה בקבוצה עוד קודם.

<u>מקרה ב -</u> $x + 1 = -p - 1$:
נקבל $x = -p - 2$, או באופן שקול $x + p = -2$.

מכאן המסקנה – כדי לקבל מספר אי פריק p צריך לקבל את $-p - 2$ קודם.

אם יש זוג מספרים אי פריקים שסכומם -2, לא ניתן לקבל אחד ללא השני, ולכן כל קבוצה אגדית תכיל אחד מהם. ניתן דוגמה ל- 8 זוגות שכאלה (ואף יותר):

11,-13	5,-7	3,-5	1,-3	-1,-1
71,-73	59,-61	41,-43	29,-31	17,-19

מכיוון שיש בקבוצה אגדית לפחות אחד מכל זוג, יש בה לפחות 8 מספרים.

הערה.

זוג ראשוניים בהפרש 2 זה מזה נקרא זוג ראשונים תאומים. ישנה השערה ידועה שלא הוכחה, לפיה יש אינסוף זוגות של ראשוניים תאומים. אם ההשערה נכונה, כל קבוצה אגדית צריכה להיות למעשה אינסופית.

7. במישור סומנו שלוש נקודות כחולות: A, B ו-C, ושתי נקודות אדומות: P ו-Q (אף 3 מהנקודות המסומנות אינן על ישר אחד, ואף 4 אינן על מעגל אחד). מעגל נקרא **מפריד** אם כל הנקודות מצבע אחד נמצאות בתוכו וכל הנקודות מהצבע האחר נמצאות מחוץ אליו. עבור המעגל החוסם של המשולש ABC, נסמן ב-O את מרכזו, וב-R את הרדיוס שלו. הראו כי מעגל מפריד קיים אם ורק אם לכל נקודה X בקטע PQ שנמצאת גם בתוך המשולש ABC, מתקיים $\mathrm{PX}\cdot\mathrm{XQ}\neq R^2-\mathrm{OX}^2$.

<u>**רקע לפתרון:**</u> יש מספר מושגים גיאומטריים שעוזרים להבין את הפתרון. ניתן לנסח את הפתרון בלי המושגים, אבל זה יהיה הרבה פחות טבעי; זאת אחת הסיבות שנרצה קודם להסביר את המושגים. סיבה אחרת היא שהמושגים שימושיים בשביל לפתור גם עוד בעיות, אז אולי כדאי להכיר בכל מקרה.

בהינתן מעגל ונקודה X במישור, ניתן להעביר ישר אקראי דרך X שחותך את המעגל בשתי נקודות, K ו-L. כידוע, מכפלת המרחקים $\mathrm{XK}\cdot\mathrm{XL}$ לא תלויה בבחירת הישר. אפשר לרשום את המכפלה הזאת בקטעים מכוונים: בוחרים כיוון בכל ישר, הקטע נחשב לחיובי אם הנקודות רשומות בכיוון הנכון ונחשב שלילי עם הנקודות רשומות בכיוון ההפוך. $\mathrm{XK}\cdot\mathrm{XL}$ לא תלוי בבחירת הכיוון: הוא חיובי אם X נמצאת מחוץ לקטע KL, ושלילי אם X נמצא בתוכו. במילים אחרות, $\mathrm{XK}\cdot\mathrm{XL}$ חיובי מחוץ למעגל ושלילי בתוכו.

גודל זה, $\mathrm{XK}\cdot\mathrm{XL}$ עם הסימן הנכון, נקרא **דרגת הנקודה** ביחס למעגל.

במעגל שרדיוסו R, אם נבחר נקודה X במרחק d מהמרכז של המעגל, ונעביר ישר דרך מרכז המעגל ודרך X, אז נראה שדרגת הנקודה היא $(d-R)(d+R)=d^2-R^2$.

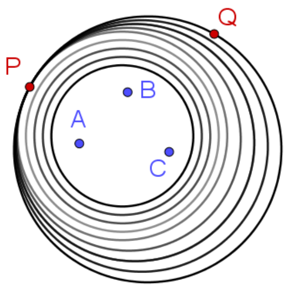
בגיאומטריה אנליטית, מעגל מתואר על ידי משוואה מהסוג $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-R^2=0$, כאשר R הוא רדיוס המעגל, (x_0,y_0) זה מרכז המעגל, ו-(x,y) זאת נקודה אקראית, שמקיימת את המשוואה אך ורק כאשר היא נמצאת על המעגל. הביטוי $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-R^2$ זה בעצם דרגת הנקודה ביחס למעגל, כי זה בעצם d^2-R^2.

טענה חשובה על דרגת נקודה: בהינתן שני מעגלים, המקום הגיאומטרי של נקודות עבורן הדרגה ביחס למעגל הראשון שווה לדרגה ביחס למעגל השני, הוא ישר. קל לבדוק את הטענה באמצעות גיאומטריה אנליטית. בהינתן שני מעגלים שמרכזיהם (x_1,y_1), (x_2,y_2), ורדיוסיהם R_1,R_2 בהתאמה, שוויון הדרגות ביחס לשני המעגלים הוא $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2-R_1^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2-R_2^2$, לאחר פתיחת סוגריים x^2 יתקזז וכך גם y^2 ונשאר עם משוואה ליניארית, שמתארת קו ישר.

<u>**פתרון ראשון.**</u> הדרישה עבור הנקודה X בשאלה אפשר לנסח גם כך: אם נבחר מעגל כלשהו שעובר דרך P ו-Q, אז הדרגה של X ביחס למעגל זה שווה לדרגה של X ביחס למעגל החוסם של ABC (או ש-X נמצאת על הציר הרדיקלי של שני המעגלים).

כיוון ראשון: נניח שיש מעגל מפריד, ונראה שאין נקודה X כמו בניסוח השאלה.

ניתן להפוך את המעגל המפריד למעגל העובר דרך P ו- Q, שכל הנקודות הכחולות באותו הצד. אכן, הנקודות P ו-Q היו בפנים, ניתן להקטין את רדיוס המעגל עד שהוא יעבור דרך אחת הנקודות (נגיד P), ולהמשיך לכווץ עם מרכז ב-P עד שהוא יעבור דרך Q. אם נקודות P ו-Q היו בחוץ, ניתן להפך להרחיב את המעגל עד שיעבור דרך שתי הנקודות האדומות.



נקרא למעגל זה Ω ולמעגל החוסם של ABC נקרא Γ. יתכן ש-Ω ו- Γ נחתכים ויתכן שלא; נבדוק את שני המקרים.

א. אם Ω ו- Γ נחתכים, נסמן את נקודות החיתוך שלהן ב- L,K. משום ש-Ω מעגל מפריד, B,A ו-C נמצאים כולם באותה קשת KL של Γ, ובפרט המשולש ABC לא חותך את הישר KL. מצד שני, אם קיימת נקודה X כמו בניסוח השאלה, אז היא נמצאת על הציר הרדיקלי של שני המעגלים, שהוא הישר KL, וגם בתוך המשולש ABC, וזה בלתי אפשרי.

ב. אם Ω ו- Γ לא נחתכים, שאחד המעגלים נמצא בתוך השני ויתכן שלא. אם לא, הקטע PQ נמצא בתוך עיגול אחד והמשולש ABC בתוך עיגול אחר, והעיגולים לא נחתכים, לכן אין נקודה פנימית משותפת למשולש ABC ולקטע PQ. אם כן, נניח שהישר PQ שעובר דרך X פוגש את Γ בנקודות S ו-T. אז הקטע ST מכיל את PQ או מוכל בו, ואז $PX \cdot XQ$ גדול ממש מ- $TX \cdot XS$ או קטן ממש ממנו, אבל בשום אופן לא שווה לו.

כיוון שני: נניח שאין מעגל מפריד, ונמצא נקודה X כמו בניסוח.

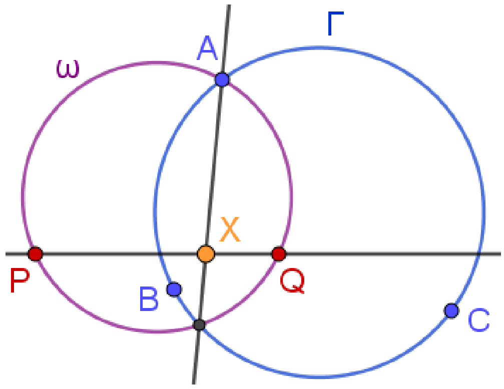
אם כל הנקודות C,B,A נמצאות באותו צד של הישר PQ, אפשר להזיז את הישר במעט כך שיהיה ישר מפריד בין PQ ל- ABC, ואז נוכל להזיז אותו במעט כך שיהיה מעגל עם רדיוס מאוד גדול, שעדיין מפריד, מה שכמובן יסתור את ההנחה שלנו.

לכן, בלי הגבלת הכלליות, ניתן להניח ש-A נמצאת בצד אחד של הישר PQ ו-B ו-C בצד השני.

נתבונן במעגל החוסם של APQ, נקרא לו ω ולמעגל החוסם של ABC נקרא Γ. לנקודת החיתוך של הישר PQ עם הציר הרדיקלי של שני המעגלים נקרא X.

אם שתי הנקודות C,B באותו צד של המעגל Ω, אז היה אפשר להזיז את Ω קצת כך שגם A תהיה באותו הצד, ו- Q,P בצד השני, ואז זה היה מעגל מפריד בסתירה להנחה. לכן C,B בצדדים שונים שלו.

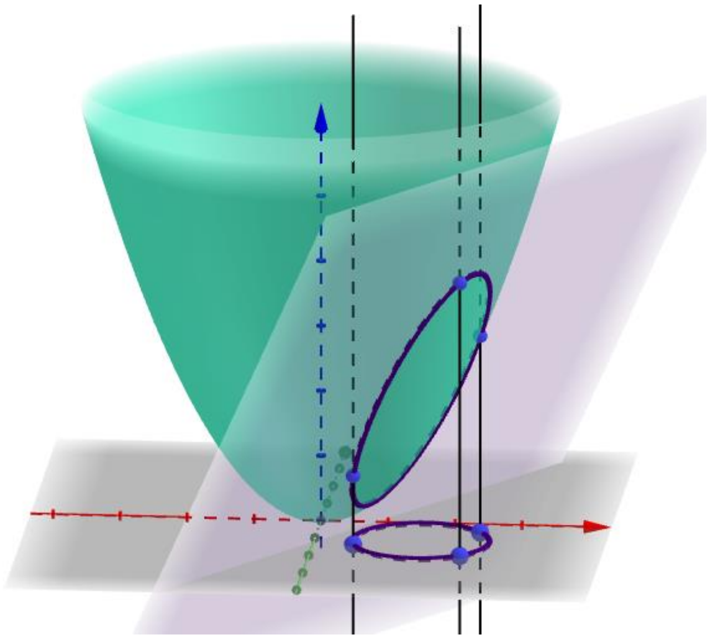
הקטע PQ מכיל את X, אחרת הנקודות Q,P היו שתיהן באותו הצד של Γ , ושוב היה אפשר להזיז את Γ מעט כך שיהיה מעגל מפריד. משום ש- X על הציר הרדיקלי, $PX \cdot XQ$ שווה לדרגת הנקודה של X ביחס ל- Γ עם סימן הפוך, שזה הביטוי מניסוח השאלה.



לכן רק נשאר להראות שהמשולש ABC מכיל את X.

זה נובע מכך שהנקודות C,B נמצאות מעברו השני של הישר PXQ ביחס ל-A, והישר AX (הציר הרדיקלי) מפריד ביניהן (זה נכון כי המעגל Ω מפריד ביניהן).

<u>**פתרון שני.**</u> ניתן להפוך את המישור האוקלידי לספל פרבולי: במקום נקודה $\mathrm{D}=(x,y)$ לוקחים נקודה במרחב $\mathrm{D}'=(x,y,z)$ כאשר $z=x^2+y^2$. התכונה היפה של הספל הפרבולי היא שכל דבר שהיה מעגל במישור הופך לצורה מישורית בפרבולואיד.



אכן, משוואה מהסוג
$x^2+y^2+ax+by+c=0$
הופכת למשוואה מהסוג
$z+ax+by+c=0$ על
פני הספל הפרבולי, וזו משוואה ליניארית שמתארת ישור לא אנכי במרחב (מישור אנכי מתאים למה שהיה ישר במישור האוקלידי).

יש גם משמעות לדרגת נקודה בספל הפרבולי. זה בדיוק המרחק בקו אנכי בין המישור שמגדיר את האליפסה שמוטלת למעגל, לבין הספל הפרבולי. אכן, אם משוואת המעגל היא $x^2+y^2+ax+by+c=0$, אז דרגת הנקודה היא $x^2+y^2+ax+by+c$, או בקואורדינאטות התלת-ממדיות $z+ax+by+c$. אז עבור נקודה (x,y) במישור, כאשר מציבים $z=x^2+y^2$ (כלומר מעלים אותה לספל הפרבולי), מקבלים שהביטוי $z+ax+by+c=d$ הוא בדיוק הדרגה של הנקודה, אבל לו היינו לוקחים נקודה $\left(x,y,x^2+y^2-d\right)$ במקום הנקודה $\left(x,y,x^2+y^2\right)$, היינו מקבלים את הנקודה על המישור.

כמובן, הכוונה היא למרחק המכוון: אם המישור נמצא מעל לפרבלואיד עבור (x,y) נתון, אז הנקודה בתוך העיגול, ובמקרה השני הנקודה היא מחוץ לעיגול.

כעת קל לפתור את השאלה. נבין מתי קיימת נקודה X כמו בשאלה. במקרה זה דרגת X ביחס למעגל ABC שווה לדרגת X ביחס למעגל כלשהו שעובר דרך P ו-Q. לכן מעל X במרחב קיימת נקודה, גם על קטע P'Q' וגם בתוך משולש A'B'C', ובאותו מרחק מהספל הפרבולי, כלומר זאת ממש אותה נקודה במרחב. ניתן גם להפוך את הטיעונים שלנו, ולהסיק שאם קיימת נקודה כזו, אז קיימת גם X כמו בשאלה, שתהיה ההיטל שלה. תנאי זה שקול לטענה שהקטע P'Q' והמשולש A'B'C' נחתכים במרחב.

מתי משולש 'A'B'C וקטע 'P'Q לא נחתכים במרחב? זה כאשר ניתן להעביר מישור, שבצד אחד שלו נמצא 'A'B'C ובצד האחר 'P'Q. אם הוא אנכי, אפשר באמצעות סיבוב קטן לקבל מישור שעדיין מפריד אותם, אבל הוא לא אנכי. על הספל הפרבולי מישור זה יוצר קו, שמפריד בין החלק של הפרבולואיד שמכיל 'A'B'C לחלק שמכיל 'P'Q.

נטיל בחזרה למישור. נקבל מעגל שמפריד בין A, B, C מצד אחד לבין P, Q בצד שני. להיפך, ניתן להתחיל למעגל מפריד, "להרים" אותו למישור שמפריד בין 'A'B'C לבין 'P'Q.

סך הכל קיבלנו ששני התנאים בשאלה שקולים לכך שהמשולש 'A'B'C והקטע 'P'Q נחתכים במרחב, ולכן שקולים זה לזה.