חדו"א 2 - פתרון תרגיל בית 3

1) נשתמש בשוויון הבא: $\circledast \quad \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

נרצה להוכיח כי: $\int_c^b f = \int_a^c f$.

תהי Π_1^n החלוקה של $[a,c]$ המוגדרת באופן הבא: $\forall i \quad \Delta x_i = \frac{c-a}{n}$

ונקודות הדגימה הן: $t_i = a + x_i$, $0 \le x_i \le \frac{b-a}{2}$.

נסמן את סכומי רימן המתאימים לחלוקות אלה ב $R_{1,n}$. מתקיים $R_{1,n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^c f$

נגדיר את החלוקות Π_2^n של $[c,b]$, באופן הבא: $\forall i \quad \Delta x_i = \frac{c-a}{n}$

ונקודות הדגימה הן: $s_i = b - x_{n-i}$ (ואתם ה-x_i-ים מהחלוקות Π_1^n)

נסמן את סכומי רימן המתאימים לחלוקות אלה ב $R_{2,n}$. מתקיים $R_{2,n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_c^b f$.

כמו כן מתקיים:

$$R_{1,n} = \sum_{i=1}^{n} f(a+x_i)\frac{c-a}{n} \overset{\text{נתון}}{=} \sum_{i=1}^{n} f(b-x_i)\frac{c-a}{n} = R_{2,n}$$

ולכן $\int_a^c f = \int_c^b f$.

מ $\circledast$ נקבל מייד כי: $\int_a^b f = 2\int_a^c f$. $\boxtimes$

<u>הערה 1</u>: אנחנו יודעים כי $R_{1,n} \to \int_a^c f$ משום ש f אינט' רימן על $[a,c]$

ולכן לכל סדרת חלוקות (וכל סדרה של נק' דגימה) עבורה $\lambda(\Pi^n) \to 0$, סכום רימן מתכנס לאינטגרל. (כנ"ל ל $R_{2,n}$).

<u>הערה 2</u>: אילו f הייתה רציפה, היינו יכולים לבצע החלפת משתנים פשוטה ולקבל את התוצאה באופן מיידי. (למעשה ניתן להראות שהצבה (החלפת משתנים) מותר לעשות גם כש f לא רציפה אך אינטגרבילית).

2. באופן דומה לשאלה 1, קל להראות שלכל $[a,b]$ מתקיים:

$$\int_a^b f = \int_{a+T}^{b+T} f \qquad \circledast$$

(לכל חלוקה של $[a,b]$ בנו חלוקה של $[a+T, b+T]$ ע"י הזזת נק' הדגימה ב T)

בפרט מתקיים: $\int_0^T f = \int_T^{2T} f = \dots = \int_{nT}^{(n+1)T} f \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.

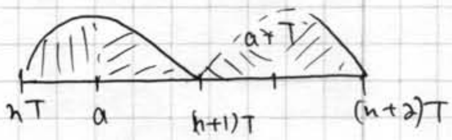
יהי $n \in \mathbb{Z}$ היחיד שעבורו מתקיים: $nT \le a \le (n+1)T$.

מצד אחד מתקיים:

$$\int_{nT}^{(n+2)T} f = \int_{nT}^{(n+1)T} f + \int_{(n+1)T}^{(n+2)T} f = 2\int_0^T f$$

מצד שני מתקיים:

$$\int_{nT}^{(n+2)T} f = \int_{nT}^{a} f + \int_{a}^{(n+1)T} f + \int_{(n+1)T}^{a+T} f + \int_{a+T}^{(n+2)T} f$$



אבל מ $\circledast$ נובע כי:

$$\int_{nT}^{a} f = \int_{(n+1)T}^{a+T} f$$

$$\int_{a}^{(n+1)T} f = \int_{a+T}^{(n+2)T} f \quad !$$

סה"כ:

$$2\int_a^{(n+1)T} f + 2\int_{(n+1)T}^{a+T} f = 2\int_0^T f$$

ולכן $I(a) := \int_a^{a+T} f = \int_0^T f$ אינו תלוי ב a. ☒

<u>הערה</u>: כמו בשאלה 1, אילו f הייתה רציפה, החלפת משתנים פשוטה הייתה מניבה את התוצאה באופן מידי.

a.) $$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx = \begin{bmatrix} u = e^x - 1 \Rightarrow x = \ln(u+1) \\ x' = \frac{1}{u+1}\ , \ u(0)=0,\ u(\ln 2) = 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{u}\cdot\frac{1}{u+1}\cdot du = \begin{bmatrix} u = v^2 \\ u' = 2v \end{bmatrix} = \int_0^1 \frac{2v\cdot v}{v^2+1}\,dv = \int_0^1 \frac{v^2}{v^2+1} =$$

$$= 2\int_0^1 \frac{v^2+1-1}{v^2+1} = 2\int_0^1 1 + 2\int_0^1 \frac{-1}{v^2+1} = 2 + 2(-1)\operatorname{arctg}(v)\Big|_0^1 =$$

$$= 2 - 2\cdot\frac{\pi}{4} = \boxed{2 - \frac{\pi}{2}}$$

b.) $$\int_{-1}^{1} \sqrt{(1-x^2)^3}\,dx = \begin{bmatrix} x = \sin t & ,\ t(-1) = -\frac{\pi}{2} \\ x' = \cos t & t(1) = \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{(1-\sin^2 t)^3}\cdot\cos t\,dt =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 t\,dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underset{u'}{\cos t}\cdot\underset{v}{\cos^3 t}\,dt \underset{\downarrow\ \text{pinδn}}{=} \cancel{\sin t\cos^3 t}^{\,=0}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} -$$

$$- \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin t\cdot 3\cos^2 t(-)\sin t\,dt = 3\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 t\cdot\cos^2 t\,dt = 3\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\,(1-\cos^2 t)\,dt =$$

$$= 3\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t - 3\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4 t \Longrightarrow 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4 t = 3\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t =$$

$$= 3\cdot\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 3\cdot\frac{\pi}{2} \Longrightarrow \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4 t = \frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{3\pi}{8}}$$

c.) $$\int_0^2 |1-x|\,dx = \int_0^1 (1-x)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx = x - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{x^2}{2} - x\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{1}$$

d.) $$\int_0^6 \lfloor x \rfloor \cdot \sin\frac{\pi x}{6}\,dx = \int_0^1 \lfloor x \rfloor \sin\frac{\pi x}{6}\,dx + \int_1^2 \lfloor x \rfloor \sin\frac{\pi x}{6} + \dots + \int_5^6 \lfloor x \rfloor \cdot \sin\frac{\pi x}{6} =$$

$\lfloor x \rfloor$ קבוע על כל תתי הקטעים האלו.

$$= \int_0^1 \underbrace{\cancel{0 \cdot \sin\frac{\pi x}{6}}}_{=0} + \int_1^2 1 \cdot \sin\frac{\pi x}{6} + \dots + \int_5^6 5 \cdot \sin\frac{\pi x}{6} =$$

$$= -\frac{6}{\pi}\cos\frac{\pi x}{6}\Big|_1^2 - 2\,\frac{6}{\pi}\cos\frac{\pi x}{6}\Big|_2^3 - \dots - 5\,\frac{6}{\pi}\cos\frac{\pi x}{6}\Big|_5^6 =$$

הקדומה של $\sin\frac{\pi x}{6}$

$$= \dots = +\frac{6}{\pi}\left[\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{5\pi}{6} + 5\right] =$$

חישוב פשוט

$$= \boxed{\frac{30}{\pi}}$$

1) $\cos\frac{\pi}{6} = -\cos\frac{5\pi}{6}$

2) $\cos\frac{\pi}{3} = -\cos\frac{2\pi}{3}$

e.) $$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} = \begin{bmatrix} x = \frac{\pi}{2} - t, & t(0) = \pi/2 \\ x' = -1 & t(\pi/2) = 0 \end{bmatrix} = -\int_{\pi/2}^{0} \frac{\sqrt{\cos t}}{\sqrt{\sin t} + \sqrt{\cos t}} =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} \Longrightarrow 2\int \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} + \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}}\right] =$$

$$= \int_0^{\pi/2} 1 = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

(4

a). נסמן את הקדומה של e^{t^2} ב $F(t)$. ואז:

$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} e^{t^2}dt = \frac{d}{dx}\left[F(x^2)-F(0)\right] = F'(x^2)\cdot 2x = \boxed{e^{x^4}\cdot 2x}$$

b) שוב נסמן ב $F(t)$ את הקדומה של $\arcsin(t)$. אז:

$$\frac{d}{dx}\int_{x-\sin x}^{\sin x} \arcsin(t)dt = \frac{d}{dx}\left[F(\sin x) - F(x-\sin x)\right] =$$

$$= F'(\sin x)\cdot \cos x - F'(x-\sin x)\cdot(1-\cos x) = \arcsin(\sin x)\cos x -$$

$$- \arcsin(x-\sin x)(1-\cos x) = \boxed{x\cos x - \arcsin(x-\sin x)(1-\cos x)}$$

(5

$$a_n = \frac{1}{n^5}\left(1^4+2^4+\dots+n^4\right) = \frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^4+\left(\frac{2}{n}\right)^4+\dots+1^4\right)$$

נשים לב כי זהו סכום רימן של הפונקציה x^4 ב $[0,1]$ (חלקים שווים באורך $\frac{1}{n}$

ונק' הדגימה הן: $1, \dots, \left(\frac{2}{n}\right), \left(\frac{1}{n}\right)$) בגבול $n\to\infty$, פרמטר החלוקה, $\frac{1}{n}$,

שואף ל 0 ולכן סכום זה מתכנס לאינטגרל:

$$\int_0^1 x^4 = \frac{1}{5}$$

כלומר: $a_n \to \frac{1}{5}$.

$$b_n = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i\cdot e^{i^2/n^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{i}{n}\right)\cdot e^{\left(\frac{i}{n}\right)^2}$$

ושוב זהו סכום רימן של xe^{x^2} ב $[0,1]$ ומתכנס לאינטגרל:

$$b_n \longrightarrow \int_0^1 xe^{x^2} = \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1 = \boxed{\frac{1}{2}(e-1)}$$

6) ג3

$$0 < \int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos x}{x} < \frac{\pi^2}{64}.$$

הפונקציה $\frac{1-\cos x}{x}$ רציפה וחסומה על $(0,\pi/4)$ ולכן אינט'.

כמו כן היא חיובית על $(0,\frac{\pi}{4})$ ולכן אי-השוויון השמאלי מתקיים (ראינו שמספיק ש־f רציפה וחיובית ותהיה נקודה אחת עבורה $f(x)>0$ כדי ש־$0<\int_a^b f$)

נראה את אי השוויון הימני. לכל $x\in(0,\frac{\pi}{4})$ נכתוב את $\cos x$ לטיילור עם שארית לגרנז':

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\cdot\sin(c_x),\quad 0<c_x<x$$

וכן:

$$\frac{1-\cos x}{x} = \frac{x}{2}-\frac{x^2}{6}\cdot\sin(c_x) < \frac{x}{2}$$

$\sin(c_x)>0$ על $(0,\pi/4)$.

לכן:

$$\int_0^{\pi/4}\frac{1-\cos x}{x} < \int_0^{\pi/4}\frac{x}{2} = \frac{x^2}{4}\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi^2}{64} \quad \blacksquare$$

7) נסמן: $M=\sup_{[a,b]}|f|$. ברור ש־$|f|\le M$

$$\Leftarrow\quad \left(\int_a^b|f|^n\right)^{1/n} \le \left(\int_a^b M^n\right)^{1/n} = M(b-a)^{1/n}\xrightarrow[n\to\infty]{} M$$

עכשיו אי השוויון בכיוון השני: f רציפה ולכן לכל $\varepsilon>0$ קיים אינטרוול $I_\varepsilon\subseteq[a,b]$ כך ש־$\forall x\in I_\varepsilon,\ M(1-\varepsilon)\le|f(x)|$. לכן:

$$\left(\int_{I_\varepsilon}(M(1-\varepsilon))^n\right)^{1/n} \le \left(\int_{I_\varepsilon}|f|^n\right)^{1/n} \le \left(\int_a^b|f|^n\right)^{1/n}$$

סימון מקובל: $\int_\alpha^\beta$, $I_\varepsilon=[\alpha,\beta]$

אבל

$$\left(\int_{I_\varepsilon}[M(1-\varepsilon)]^n\right)^{1/n} = |I_\varepsilon|^{1/n}\cdot M(1-\varepsilon)$$

אורך הקטע I_ε.

! $|I_\varepsilon|^{1/n} \cdot M(1-\varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} M(1-\varepsilon)$. (סימון : $I_n = \left(\int_a^b |f|^n dx \right)^{1/n}$.

בסכם בשני הסעיפים האחרונים הוכחנו כי :

$$\underline{\lim}\, I_n \ge M \quad , \quad \overline{\lim}\, I_n \le M$$

ולכן $\lim_{n\to\infty} I_n = M$. $\boxtimes$

8) נתבונן ב $\int_a^b f^{(n)}(t)(b-t)^{n-1}dt$. הפונ' : $0 \le (b-t)^{n-1}$ על $[a,b]$,

לכן ניתן להשתמש במשפט ערך הביניים האינטגרלי ולקבל :

$$\int_a^b f^{(n)}(t)(b-t)^{n-1}dt = f^{(n)}(c) \cdot \int_a^b (b-t)^{n-1}dt = f^{(n)}(c)\, \frac{(b-t)^n}{n}(-1) \Big|_a^b =$$

$$= \frac{1}{n} f^{(n)}(c)\,(b-a)^n = \frac{(n-1)!}{n!} f^{(n)}(c)\,(b-a)^n \;;$$

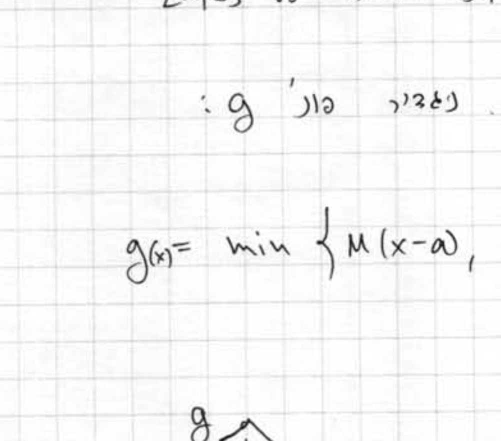
כאשר $c \in (a,b)$. $\boxtimes$

9) נגדיר : $M = \sup_{[a,b]} |f'|$. אם f' אינה חסומה על $[a,b]$

אז הטענה טריוויאלית, לכן נניח כי $M < \infty$. נגדיר פונ' g :

$$g(x) = \min\{M(x-a),\, M(b-x)\} = \begin{cases} M(x-a) & a \le x \le \frac{a+b}{2} \\ M(b-x) & \frac{a+b}{2} \le x \le b \end{cases}$$

נראה שמתקיים $f(x) \le g(x)$ לכל x ב $[a,b]$



הנה ציור :

הסיבה לכך ש $f(x) \le g(x)$ היא פשוט לגרנז': עבור $a \le x \le \frac{a+b}{2}$

נניח בשלילה שיש $a \le c \le \frac{a+b}{2}$ עבורה $f(c) > g(c)$ אז:

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} = \frac{f(c)}{c-a} > \frac{g(c)}{c-a} = \frac{g(c)-g(a)}{c-a} = g'(c_2) = M$$

$a < c_2 < c$

|| (לגרנז')

$a < c_1 < c \quad f'(c_1) \quad \Rightarrow \quad f'(c_1) > M$

בסתירה להגדרת M.

באותו אופן מכוונים את אי השוויון ל $\frac{a+b}{2} < x < b$. אם כך, מתקיים:

$$\int_a^b f(x)dx \underset{(1)}{\le} \int_a^b g(x)dx = M\cdot\int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a) + M\cdot\int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x) = \frac{(b-a)^2}{4}\cdot M$$

מהלינר זה מיידי

הערה! f ו g רציפות נובע כי שוויון ב (1) מתקיים רק אם $f(x)=g(x)$ לכל $x \in [a,b]$ (אחרת $0 \le g-f$ ו > 0 בנק' אחת והאינטגרל יהיה > 0)

אבל זה לא ייתכן כי f גזירה ו g איננה גזירה ב $x = \frac{a+b}{2}$.

לכן ב (1) יש א"ש חזק לכן קיימת $0 < p < M$ עבורה (1) גם כן מתקיים.

ושים לב כי אם f קבועה, כלומר $f \equiv 0$, מתקיים שוויון.

לכן נניח כי $f \not\equiv 0$ ולכן f' מקבלת גם ערכים שליליים.

היות ולנגזרת יש תכונת דרבו (ערך ביניים) נובע כי קיימת נק' $c \in (a,b)$

עבורה $p < |f'(c)| < M$ ולכן:

$$\int_a^b f(x)dx < \frac{(b-a)^2}{4}|f'(c)|$$

כנדרש. $\boxtimes$

10) א) f רציפה ולכן לכל $\varepsilon>0$ ולכל x קיימת $\delta>0$ כך ש

$|x-t|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(t)|<\varepsilon$. כלומר, $f(x)-\varepsilon \le f(t) \le f(x)+\varepsilon$

לכל $t\in[x-\delta, x+\delta]$. מתקיים:

$$\frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta}(f(x)-\varepsilon)\,dt \le \frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta}f(t)\,dt \le \frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta}(f(x)+\varepsilon)\,dt$$

$$\Leftarrow \quad \frac{1}{\cancel{2\delta}}(f(x)-\varepsilon)\cdot\cancel{2\delta} \le \frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta}f(t)\,dt \le \frac{1}{\cancel{2\delta}}\cdot(f(x)+\varepsilon)\cdot\cancel{2\delta}$$

$$\Leftarrow \quad f(x)-\varepsilon \le \frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta}f(t)\,dt \le f(x)+\varepsilon$$

לכן $\lim_{\delta\to 0^+} F_\delta(x_0) = f(x_0)$ לכל $x_0\in\mathbb{R}$.

ב) על קטע $[a,b]$ f רציפה במ"ש (היינה קנטור) ולכן לכל $\varepsilon>0$

קיים $\delta>0$ כך ש $|t-x|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(t)|<\varepsilon$ לכל $x,t\in[a,b]$

חזרה על ההוכחה בסעיף א' תתן שוב: $f(x)-\varepsilon \le F_\delta(x) \le f(x)+\varepsilon$

ולכן $|F_\delta(x)-f(x)|<\varepsilon$ לכל $x\in[a,b]$. $\boxtimes$

<u>הערה</u>: בעצם הראינו בשאלה זו שכל פונקציה רציפה ניתן לקרב ע"י פונקציות גזירות ברציפות!

11) השיטה היא לכתוב את הביטוי שרשום בצורה קצת שונה:

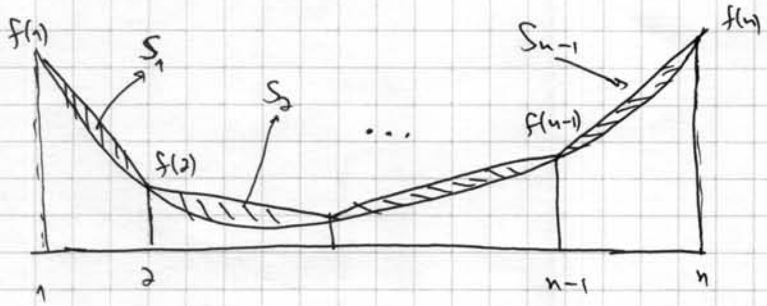
$$\frac{1}{2}f(1)+f(2)+\dots+\frac{1}{2}f(n)-\int_1^n f(x)\,dx = \frac{1}{2}(f(1)+f(2))+\frac{1}{2}(f(2)+f(3))+\dots+\frac{1}{2}(f(n-1)+f(n))-$$

$$-\int_1^n f(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}(f(1)+f(2))-\int_1^2 f(x)\,dx\right]+\dots+\left[\frac{1}{2}(f(n-1)+f(n))-\int_{n-1}^n f(x)\,dx\right]$$

נגדיר לכל $1 \le i \le n-1$: $S_i = \frac{1}{2}\left(f(i)+f(i+1)\right) - \int_i^{i+1} f(x)\,dx$ והשאלה שלנו היא:

$$L_n = S_1 + S_2 + \dots + S_{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} ?$$

נבין את הכתיבה הזו בצורה גאומטרית:

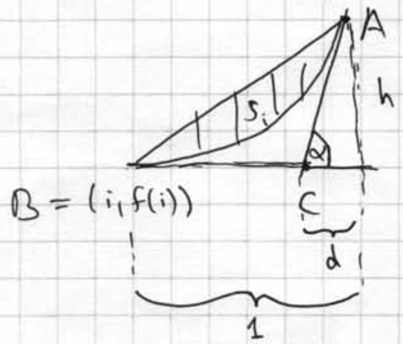


S_i הם השטחים הכהים:

(באופן פורמלי ניתן להראות כי $S_i > 0$ משום ש f קמורה, ודאו זאת!)

כאשר $\frac{1}{2}\left(f(i)+f(i+1)\right)$ זה השטח של הטרפז המתאים ו- $\int_i^{i+1} f$ זה השטח של הגרף מתחת השטח S_i.

מכאן ניתן להסיק כי L_n היא סדרה מונוטונית עולה. נרצה להראות שהיא גם חסומה. נראה בנפרד ש $S_i < f'(i+1) - f'(i)$. הגישה נראה זאת כאשר $f'(i)=0$;



, $tg\alpha = f'(i+1)$.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{h(1-d)}{2} = \frac{1}{2} tg\alpha \cdot d(1-d)$$
$$= \frac{1}{2} f'(i+1)$$

וברור כי $S_i < S_{\Delta ABC}$.

מה אם $f'(i) \neq 0$? אז נוסיף ל f את הפונקציה $l(x) = -f'(i)x$, כלומר נגדיר $\hat{f}(x) = f(x) - l(x)$. תכונה כללית, שקל לוודא, של פונקציות קמורות היא שסכום של פונ' קמורות היא פונ' קמורה. היות! ו $-l(x)$ היא פונ' ליניארית (ולכן קמורה) נקבל כי $\hat{f}(x)$ קמורה וכן $\hat{f}'(i) = 0$. לכן $\hat{S}_i < \hat{f}'(i+1)$. אבל נשים לב כי:

$$\hat{S}_i = \frac{1}{2}\left(\hat{f}(i) + \hat{f}(i+1)\right) - \int_i^{i+1} \hat{f}\,dx = S_i - \underbrace{\cancel{\left[\frac{1}{2}\left(l(i)+l(i+1)\right) - \int_i^{i+1} l(x)\,dx\right]}}_{=0} = S_i$$

כלומר $S_i < f'(i+1) - f'(i)$ (למעשה הראינו כי $S_i < \frac{f'(i+1)-f'(i)}{2}$)

כעת נשאר רק לשים לב שמתקיים:

$$L_n = S_1 + \dots + S_{n-1} \leq (f'(2)-f'(1)) + (f'(3)-f'(2)) + \dots + (f'(n)-f'(n-1))$$

$$= f'(n) - f'(1) \xrightarrow[n\to\infty]{} -f'(1) \Rightarrow L_n \leq -f'(1)$$

סכום טלסקופי

(נתון $f'(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$)

ולמעשה היות ו f קמורה,

f' היא פונ' מונוטונית עולה, והיות ו $f'(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ נובע כי לכל x: $f'(x) \leq 0$,

ולכן החסם הנ"ל ממש $-f'(1)$ (ולא חסם כלשהו).

סה"כ L_n היא סדרה מונוטונית וחסומה (וחיובית) ולכן קיים גבול סופי וחיובי. ☒