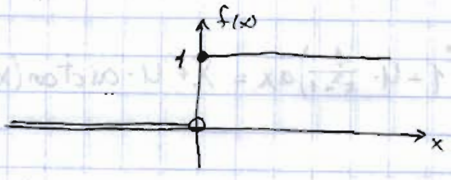
חדו"א 2 - פיתרון תרגיל 1

1 (א) לא <u>נכון</u>. התנאי שמנוסח כאן הוא חזק מאוד, וגורר ש-f <u>קבועה</u>; אם לכל $x\in\mathbb{R}$ יש $0<\delta_x$ כך שלכל $0<\varepsilon$,
$|x-y|<\delta_x \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$, אז לכל $y\in(x-\delta_x, x+\delta_x)$, $f(x)=f(y)$.
(כי $|f(x)-f(y)|$ קטן מכל מספר חיובי, כלומר שווה לאפס).
כלומר שלכל $x\in\mathbb{R}$, יש קטע $(x-\delta_x, x+\delta_x)$ שבו f קבועה.
מכאן ניתן להסיק ש-f קבועה (מדוע? תרגיל). ולכן התנאי אינו שקול לרציפות (למרות שהוא גורר רציפות).

(ב) <u>נכון</u>. התנאי כאן אינו שקול לרציפות, אך אם f רציפה היא מקיימת אותו. נראה זאת. יהי $x\in\mathbb{R}$, ו- $0<\delta$.
נתבונן בקטע <u>הסגור</u>: $I=[x-\delta, x+\delta]$. f רציפה על I ולכן חסומה (ויירשטראס). נניח ש- $0<M$ כך ש- $|f(y)|\le M$ $\forall y\in I$.
אז $\varepsilon=2M+1$ עובד, כי $|x-y|<\delta \Rightarrow y\in I$, ולכן:
$|f(x)-f(y)|\le|f(x)|+|f(y)|\le M+M<2M+1=\varepsilon$.

<u>הערה:</u> מדוע התנאי לא גורר רציפות? נתבונן בפונקציה:



$$f(x)=\begin{cases}1\ ; & x\ge 0\\ 0\ ; & 0>x\end{cases}$$

בבירור f לא רציפה, אך תחשבו מדוע התנאי מתקיים (רמז: $\varepsilon=2$).

2 (א) אם <u>נרצה</u> ש- $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ תקיים $F'=f$, ברור שלF יש את הצורה: $F(x)=\begin{cases}-\cos x+C_1\ ; & x<\frac{\pi}{4}\\ \sin x+C_2\ ; & \frac{\pi}{4}\le x\end{cases}$. אבל יש תנאי על הקבועים C_1, C_2; כדי ש- F תהיה גזירה, עליה להיות רציפה.
ב- $\frac{\pi}{4}$, מימין היא רציפה. יש לדרוש שהגבול משמאל יהיה שווה לערך הפונקציה;

$$-\cos\frac{\pi}{4}+C_1=\sin\frac{\pi}{4}+C_2$$

$$C_1-C_2=2\sin\frac{\pi}{4}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$ $\left(\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$\Rightarrow C_1=\sqrt{2}+C_2$$

לכן: $F_{(x)} = \begin{cases} -\cos x + \sqrt{2} + C & ; \quad x < \frac{\pi}{4} \\ \sin x + C & ; \quad \frac{\pi}{4} \le x \end{cases}$

(ב) כן, שונות בתחומים;

$$F_{(x)} = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + C_1 & ; \quad x \in (0,1) \\ \frac{x^3}{3} + C_2 & ; \quad x \in (2,3) \end{cases}$$

(3)

(a) $$\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 1\right) dx = \frac{-1}{x} - 2\ln|x| + x + C$$

(b) $$(1-x)(1-2x)(1-3x) = (1-2x)\cdot(\underbrace{1-2x}+x)(\underbrace{1-2x}-x) = (1-2x)\cdot\left([1-2x]^2 - x^2\right) =$$

$$= (1-2x)^3 - x^2(1-2x) = (1-2x)^3 - x^2 + 2x^3$$

$$\Rightarrow \int (1-x)(1-2x)(1-3x)\,dx = \int \left((1-2x)^3 + 2x^3 - x^2\right) dx = \frac{1}{4}\cdot(1-2x)^4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}x^4 - \frac{x^3}{3} + C$$

(c) $$\int (1-x^{-2})\cdot\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx = \int (1-x^{-2})\cdot\left(x^{3/2}\right)^{1/2} dx = \int \left(x^{3/4} - x^{-5/4}\right) dx =$$

$$= \frac{4}{7}\cdot x^{7/4} + 4\cdot x^{-1/4} + C$$

(d) $$\int (3x-7)^{12}\,dx = \frac{1}{13}\cdot(3x-7)^{13}\cdot\frac{1}{3} + C$$

(e) $$x^4 + 2 + x^{-4} = (x^2)^2 + 2\cdot x^2\cdot x^{-2} + (x^{-2})^2 = (x^2 + x^{-2})^2$$

$$\Rightarrow \int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^5}\,dx = \int \frac{x^2 + x^{-2}}{x^5}\,dx = \int (x^{-3} + x^{-7})\,dx = \left(\frac{1}{-2}\right)x^{-2} + \left(\frac{1}{-6}\right)x^{-6} + C$$

(f) $$\int \frac{x^2+5}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1+4}{x^2+1}\,dx = \int \left(1 + 4\cdot\frac{1}{x^2+1}\right) dx = x + 4\cdot\arctan(x) + C$$

(g) בין 0 ל- π, אז $0 \le \sin x$, לכן: $\sin x = \sqrt{\sin^2 x}$.

$$\int \sqrt{1-\cos^2 x}\,dx = \int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

(h) $$\int \left(\frac{2^{x+1}}{10^x} - \frac{5^{x-1}}{10^x}\right) dx = \int \left(2\cdot\left[\tfrac{1}{5}\right]^x - \frac{1}{5}\cdot\left[\tfrac{1}{2}\right]^x\right) dx = 2\cdot\left[\tfrac{1}{5}\right]^x\cdot\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{5}\right)} - \frac{1}{5}\cdot\left[\tfrac{1}{2}\right]^x\cdot\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} + C$$

(i) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{dx}{a\cdot\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

(j) $$\sqrt{2\cdot(1+\cos x)} = \sqrt{2\cdot 2\cdot\cos^2\frac{x}{2}} = 2\cdot\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|$$

ל- $x \in (-\pi, \pi)$, אזי $\frac{x}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos\left(\frac{x}{2}\right) \ne 0$, ובנוסף $\cos\left(\frac{x}{2}\right) > 0$.

$$A = (-\pi, \pi) \Rightarrow \int \frac{\sin x}{\sqrt{2(1+\cos x)}}\,dx = \int \frac{2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{2\cdot\cos\frac{x}{2}}\,dx = \int \sin\frac{x}{2}\,dx = -2\cdot\cos\frac{x}{2} + C$$

4

(a) $\int \underset{u}{x}\cdot \underset{v'}{e^{-2x}}\cdot dx = \underset{u}{x}\cdot\underset{v}{\left(-\tfrac{1}{2}\right)\cdot e^{-2x}} - \int 1\cdot \tfrac{-1}{2} e^{-2x}\cdot dx =$

$= \frac{-1}{2}\cdot x e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x} dx = e^{-2x}\cdot\left[\frac{-x}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2}\right] + C$

(b) $\int 1\cdot \sin(\ln x)\cdot dx = x\cdot \sin(\ln x) - \int x\cdot\cos(\ln x)\cdot \frac{1}{x}\cdot dx =$

$= x\cdot\sin(\ln x) - \int 1\cdot\cos(\ln x)\cdot dx = x\cdot \sin(\ln x) - \left[x\cdot\cos(\ln x) + \int x\cdot \sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\right]$

$\Rightarrow \int \sin(\ln x)\cdot dx = -\int \sin(\ln x)\cdot dx + x\cdot\left[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right]$

$\Rightarrow \int \sin(\ln x)\cdot dx = \frac{1}{2}\cdot x\cdot\left[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right] + C$

(c) $\int \underset{u'}{x}\cdot \underset{v}{\ln^2 x}\cdot dx = \underset{u}{\frac{x^2}{2}}\cdot \underset{v}{\ln^2 x} - \int \underset{u}{\frac{x^2}{2}}\cdot \underset{v'}{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}\cdot dx = \frac{x^2\cdot \ln^2 x}{2} - \int \underset{f'}{x}\cdot \underset{g}{\ln x}\cdot dx =$

$= \frac{x^2\cdot\ln^2 x}{2} - \left[\underset{f}{\frac{x^2}{2}}\cdot \underset{g}{\ln x} - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\right] = \frac{x^2\cdot \ln x}{2}(\ln x - 1) - \frac{1}{2}\int x dx =$

$= \frac{x^2\cdot\ln^2 x}{2} - \frac{x^2\cdot\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$

(d) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx = \int \underset{f'}{x^{-2}}\cdot \underset{g}{\ln x}\cdot dx = \underset{f}{-x^{-1}}\cdot \underset{g}{\ln x} - \int -x^{-1}\cdot\frac{1}{x} dx = -\frac{\ln x}{x} + \int x^{-2}\cdot dx =$

$= -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$

(e) $\int \underset{f'}{x}\cdot \underset{g}{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}\cdot dx = \underset{f}{\frac{x^2}{2}}\cdot \underset{g}{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} - \int \underset{f}{\frac{x^2}{2}}\cdot \underset{g'}{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'}\cdot dx =$

$= \frac{x^2}{2}\cdot\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \int \frac{x^2}{2}\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\cdot\frac{1(1-x)+1(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{2}{(1+x)(1-x)} dx$

$\left(\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)' = \frac{2}{1-x^2}$ (*)

מיון, כבדרך אגב, ש-

כי כך נשתמש בזה!

$\Rightarrow \ldots = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \int\frac{x^2}{1-x^2} dx = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \int\frac{1-x^2-1}{1-x^2} dx =$

$= \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \int 1\cdot dx - \int\frac{1}{1-x^2}\cdot dx = x^2\cdot\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + x - \frac{1}{2}\cdot\int\frac{2}{1-x^2} dx \overset{(*)}{=}$

$= x^2\cdot\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + x - \frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + C$

(f) ברור שמוגדר כי- $A=(-1,1)$, אחרת $\sqrt{1-x^2}$ לא מוגדר.

$$\int \underset{u'}{1}\cdot\underset{v}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \underset{u}{x}\cdot\underset{v}{\sqrt{1-x^2}} - \int \underset{u}{x}\cdot\underset{v'}{\frac{1}{2}\cdot\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}} = x\cdot\sqrt{1-x^2} - \int\frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \left[\int\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right] = x\cdot\sqrt{1-x^2} - \underline{\int\sqrt{1-x^2}\,dx} + \arcsin(x)$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot\int\sqrt{1-x^2}\,dx = x\cdot\sqrt{1-x^2} + \arcsin x$$

$$\Rightarrow\ \int\sqrt{1-x^2}\,dx = \left(x\cdot\sqrt{1-x^2} + a\sin(x)\right)\cdot\frac{1}{2} + C$$

(g) $$\int \underset{u'}{e^{2x}}\cdot\underset{v}{\sin 3x} = \underset{u}{\frac{1}{2}e^{2x}}\cdot\underset{v}{\sin(3x)} \int \underset{u}{\frac{1}{2}e^{2x}}\cdot\underset{v'}{3\cos 3x} = \frac{1}{2}e^{2x}\cdot\sin 3x - \frac{3}{2}\cdot\int \underset{f'}{e^{2x}}\cdot\underset{g}{\cos 3x} =$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\cdot\sin(3x) - \frac{3}{2}\cdot\left[\underset{f}{\frac{1}{2}e^{2x}}\cdot\underset{g}{\cos 3x} - \int \underset{f}{\frac{1}{2}e^{2x}}\cdot(-3)\cdot\sin(3x)\right] =$$

$$= e^{2x}\cdot\left[\frac{\sin 3x}{2} - \frac{3\cdot\cos 3x}{4}\right] - \frac{9}{4}\cdot\int e^{2x}\cdot\sin 3x$$

$$\Rightarrow\ \left(1+\frac{9}{4}\right)\cdot\int e^{2x}\cdot\sin 3x = e^{2x}\cdot\left(\frac{\sin 3x}{2} - \frac{3\cdot\cos 3x}{4}\right)$$

$$\Rightarrow\ \int e^{2x}\cdot\sin 3x = \frac{4}{13}\cdot e^{2x}\cdot\left(\frac{\sin 3x}{2} - \frac{3\cdot\cos 3x}{4}\right) + C$$

(h) $$\int \underset{u'}{x^n}\cdot\underset{v}{\ln x} = \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\ln x - \int\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x^{n+1}\cdot\ln x}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C$$

(1c) 5

$$I_m = \int\frac{dx}{(x^2+1)^m} = \int \underset{u'}{1}\cdot\underset{v}{\frac{1}{(x^2+1)^m}} = \underset{u}{x}\cdot\underset{v}{\frac{1}{(x^2+1)^m}} - \int \underset{u}{x}\cdot\underset{v'}{(-m)\cdot\frac{2x}{(x^2+1)^{m+1}}} =$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^m} + 2m\cdot\int\frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{m+1}} = \frac{x}{(x^2+1)^m} + 2m\cdot\int\frac{1}{(x^2+1)^m} - 2m\cdot\int\frac{1}{(x^2+1)^{m+1}}$$

$$\Rightarrow\ I_m = \frac{x}{(x^2+1)^m} + 2m\cdot I_m - 2m\cdot I_{m+1}$$

$$\Rightarrow\ \boxed{I_{m+1} = \left(1-\frac{1}{2m}\right)\cdot I_m + \frac{1}{2m}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^m}}$$

(ב) יהי: $\alpha\neq -1$, ולכל $m\in\mathbb{N}$ נגדיר: $I_m = \int x^\alpha\cdot\ln^m x\cdot dx$

$$\boxed{I_{m+1}} = \int \underset{u'}{x^\alpha}\cdot\underset{v}{\ln^{m+1}x} = \underset{u}{\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}}\cdot\underset{v}{\ln^{m+1}x} - \int \underset{u}{\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}}\cdot\underset{v'}{(m+1)\cdot\ln^m x\cdot\frac{1}{x}} =$$

$$= \frac{x^{\alpha+1}\cdot(\ln x)^{m+1}}{\alpha+1} - \frac{m+1}{\alpha+1}\cdot\int x^\alpha\cdot(\ln x)^m\,dx = \boxed{\frac{x^{\alpha+1}\cdot(\ln x)^{m+1}}{\alpha+1} - \frac{m+1}{\alpha+1}\cdot I_m}$$

6

a) $$\int \frac{dx}{1-x} = -\int \frac{dx}{x-1} = -\ln|x-1| + C$$

b) $$\int \frac{1}{(x-1)^2}dx = -\frac{1}{x-1} + C = \frac{1}{1-x} + C$$

c) $$\int \frac{x^7}{1-x^4} = \int x^3 \cdot \left(\frac{x^4}{1-x^4}\right) = \int x^3 \cdot \left(\frac{x^4-1+1}{1-x^4}\right) = \int -x^3 \cdot dx + \int \frac{x^3}{1-x^4} =$$

$$= -\frac{x^4}{4} - \frac{1}{4}\ln|1-x^4| + C$$

d) $$\int x^2 \cdot (1+x^3)^{1/3} = \frac{1}{3}\int (1+x^3)^{1/3} \cdot 3x^2 \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{(1+x^3)^{4/3}}{4/3} + C$$

e) $$\int \frac{dx}{x \cdot \ln|x|} = \begin{pmatrix} t = \ln x \\ x = e^t \\ x' = e^t \end{pmatrix} = \int \frac{1}{e^t \cdot t} \cdot e^t \cdot dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln|\ln|x||$$

f) $$\sqrt{e^x} = e^{\frac{x}{2}} \Rightarrow \int \frac{e^x}{e^x + e^{\frac{x}{2}}}dx = \int \frac{e^{x/2}}{e^{x/2}+1}dx = \ln(e^{\frac{x}{2}}+1) \cdot 2$$

g) $$\int \frac{e^x+2}{e^x+4+7 \cdot e^{-x}} \cdot dx = \int \frac{e^{2x}+2e^x}{e^{2x}+4e^x+7}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}+4 \cdot e^x}{e^{2x}+4e^x+7}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+4e^x+7) + C$$

h) $$\int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2}dx = \int (\mathrm{atan}\, x)^2 \cdot (\mathrm{atan}\, x)' dx = \frac{1}{3}(\arctan x)^3 + C$$

i) $$\int \ln\sqrt[17]{x^2+7x+12} \cdot dx = \frac{1}{17}\int \ln[(x+3)(x+4)]dx = \frac{1}{17}\int [\ln(x+3) + \ln(x+4)]dx$$

$$= \frac{1}{17}\left[(x+3)\ln(x+3) - (x+3) + (x+4) \cdot \ln(x+4) - (x+4)\right] + C$$

j) $$\int \cot x \cdot dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x}dx = \ln(\sin x) + C$$

k) $$\int x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = -\int \left(\frac{-x^2}{2}\right)' \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx = -e^{-\frac{x^2}{2}} + C$$

l) $$\int x^3 \cdot e^{-x^2} = \int \underbrace{\left(-\frac{x^2}{2}\right)}_{u} \cdot \underbrace{(-2x) \cdot e^{-x^2}}_{v'} = \underbrace{\frac{-x^2}{2} \cdot e^{-x^2}}_{u \cdot v} - \int \underbrace{(-x)}_{u'} \cdot e^{-x^2} \cdot dx =$$

$$= e^{-x^2} \cdot \frac{-x^2}{2} - \frac{1}{2}\int (-2x) \cdot e^{-x^2} \cdot dx = e^{-x^2} \cdot \left[\frac{-x^2}{2} - \frac{1}{2}\right] + C$$

m) $$\int e^{\sqrt{x}} \cdot dx = \begin{pmatrix} y = \sqrt{x} & , & x = y^2 \\ y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} & , & x' = 2y \end{pmatrix} = \int \underset{v'}{e^y} \cdot \underset{u}{2y} \cdot dy = \underset{v}{e^y} \cdot \underset{u}{2y} - \int \underset{v}{e^y} \cdot \underset{u'}{2}\, dy$$

$$\Rightarrow \int e^{\sqrt{x}}\cdot dx = e^{\sqrt{x}}\cdot 2\sqrt{x} - 2e^{\sqrt{x}} + C$$

(n) $\int \underset{u}{x}\cdot \underset{v'}{e^x\cdot \cos x} = \ ?$

נרצה לעשות אינטגרציה בחלקים, אבל מהי הקדומה של $e^x\cdot\cos x$?

$$\int \underset{u'}{e^x}\cdot \underset{v}{\cos x} = \underset{u}{e^x}\cdot\underset{v}{\cos x} - \int \underset{u}{e^x}\cdot \underset{v'}{-\sin x} = e^x\cdot\cos x + \int \underset{u'}{e^x}\cdot\underset{v}{\sin x} =$$

$$= e^x\cdot\cos x + \underset{u}{e^x}\cdot\underset{v}{\sin x} - \int \underset{u}{e^x}\cdot\underset{v'}{\cos x} \Rightarrow \underline{\left(e^x\cdot[\cos x+\sin x]\cdot\tfrac{1}{2}\right)' = e^x\cdot\cos x}$$

עכשיו אפשר להמשיך עם התרגיל המקורי:

$$\int \underset{u}{\underline{x}}\cdot\underset{v'}{\underline{e^x\cdot\cos x}} = \underset{u}{x}\cdot \underset{v}{\tfrac{1}{2}e^x\cdot[\cos x+\sin x]} - \int \underset{u'}{1}\cdot\underset{v}{\tfrac{1}{2}e^x[\cos x+\sin x]}dx =$$

$$= x\cdot\frac{e^x}{2}[\cos x+\sin x] - \frac{1}{2}\int e^x\cdot\cos x\cdot dx - \frac{1}{2}\int e^x\cdot\sin x\cdot dx =$$

$$= \frac{e^x}{2}\cdot[\cos x+\sin x]\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\cdot\int e^x\cdot\sin x\cdot dx$$

את האינטגרל האחרון נפתור, שוב, בחלקים:

$$\int \underset{u'}{e^x}\cdot\underset{v}{\sin x} = e^x\cdot\sin x - \int \underset{f'}{e^x}\cdot\underset{g}{\cos x} = e^x\cdot\sin x - \left(e^x\cdot\cos x - \int e^x\cdot(-\sin x)dx\right) =$$

$$= e^x\cdot(\sin x-\cos x) - \int e^x\cdot\sin x \Rightarrow \int e^x\sin x = \tfrac{1}{2}e^x\cdot(\sin x-\cos x)$$

$$\Rightarrow \int x\cdot e^x\cdot\cos x\cdot dx = \tfrac{1}{2}e^x\cdot(\cos x+\sin x)\cdot\left(x-\tfrac{1}{2}\right) - \tfrac{1}{4}\cdot e^x\cdot(\sin x-\cos x) + C$$

(o) $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$

נבצע את ההחלפה המומלצת:

$$(t-x)^2 = x^2+a^2 \iff t = x+\sqrt{x^2+a^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$t^2-2tx = a^2 \iff 2tx = t^2-a^2 \Rightarrow \boxed{x = \frac{t^2-a^2}{2t}}$$

אז עבור ההחלפה הנ"ל;

$$x' = \frac{4t^2-2(t^2-a^2)}{4t^2} = \frac{2t^2+2a^2}{4t^2} = \frac{t^2+a^2}{2t^2}$$

$$\sqrt{x^2+a^2} = t-x = t-\frac{t^2-a^2}{2t} = \frac{2t^2-t^2+a^2}{2t} = \frac{t^2+a^2}{2t}$$

$$\Rightarrow \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int\frac{1}{\left(\frac{t^2+a^2}{2t}\right)}\cdot\left(\frac{t^2+a^2}{2t^2}\right)dt = \int\frac{dt}{t} = \ln|t|+C = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C$$

(p) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \begin{pmatrix} x = \frac{a}{\cos t} \\ x' = \frac{\sin t\cdot a}{\cos^2 t}\end{pmatrix} = \int\frac{dt}{\sqrt{a^2\cdot\left(\frac{1}{\cos^2 t}-1\right)}}\cdot\frac{a\sin t}{\cos^2 t} =$ $\qquad 0<|a|<|x|$

$$= \int\frac{\sin t\cdot dt}{\sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}\cdot\cos^2 t} = \int\frac{\sin t\cdot dt}{\frac{\sin t}{\cos t}\cdot\cos^2 t} = \int\frac{dt}{\cos t}$$

נשים לב;

$$\frac{1}{\cos t} = \frac{1}{\cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2}} = \frac{1}{(\cos\frac{t}{2} + \sin\frac{t}{2})\cdot(\cos\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2})} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left[\sin\frac{t}{2} + \cos\frac{t}{2}\right]}{\cos\frac{t}{2} + \sin\frac{t}{2}} - \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\sin\frac{t}{2} - \cos\frac{t}{2}\right)}{\cos\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2}} = \frac{\left(\cos\frac{t}{2} + \sin\frac{t}{2}\right)'}{\cos\frac{t}{2} + \sin\frac{t}{2}} - \frac{\left(\cos\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2}\right)'}{\cos\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2}}$$

$$\Longrightarrow \int\frac{dt}{\cos t} = \ln\left(\cos\frac{t}{2} + \sin\frac{t}{2}\right) - \ln\left|\cos\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2}\right| = \ln\left|\frac{\cos\frac{t}{2} + \sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2}}\right| + C$$

וניתן להציב את $t(x)$ כדי לקבל את הקדומה של $\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

(7) תחילה נראה מה קורה לפולינום בסיסי; למונום x^n;

$$\int \underset{u}{x^n}\cdot \underset{v'}{e^x}\cdot dx = \underset{u}{x^n}\cdot \underset{v}{e^x} - \int \underset{u'}{n\cdot x^{n-1}}\cdot \underset{v}{e^x}\cdot dx$$

כלומר, אם נגדיר $I_n = \int x^n e^x$, אז מתקיים:

$$I_n = x^n\cdot e^x - n\cdot I_{n-1}$$

- עכשיו אנחנו יכולים להוכיח את הטענה, באינדוקציה על $\deg P$. ל- $\deg P=0$ - ברור. עכשיו נניח נכונות ל- $\deg P=n$ ונוכיח ל- $\deg P=n+1$.

- יהי P פולינום ממעלה $n+1$, אז $P_{(x)} = a_{n+1}\cdot x^{n+1} + \tilde{P}_{(x)}$, כאשר $\deg\tilde{P}\le n$. לכן:

$$\int P_{(x)} e^x\cdot dx = a_{n+1}\int x^{n+1}\cdot e^x\cdot dx + \int \tilde{P}_{(x)}\cdot e^x\cdot dx$$

האינטגרל הראשון נותן, לפי החישוב שעשינו:

$$a_{n+1}\cdot x^{n+1}\cdot e^x - (n+1)\cdot a_{n+1}\cdot\int x^n\cdot e^x\cdot dx$$

לפי הנחת האינדוקציה, כיוון ש- $\deg\left(\tilde{P}_{(x)} - (n+1)a_{n+1}\cdot x^n\right)\le n$,

קיים פולינום $\tilde{Q}$, $\deg\tilde{Q}\le n$, כך ש:

$$\int\left(\tilde{P}_{(x)} - (n+1)a_{n+1}\cdot x^n\right)e^x\cdot dx = \tilde{Q}_{(x)}e^x + C$$

ובסה"כ

$$\int P_{(x)}e^x\cdot dx = \left(a_{n+1}\cdot x^{n+1} + \tilde{Q}_{(x)}\right)\cdot e^x + C$$

וזה מסיים את ההוכחה, כי $\deg\tilde{Q}\le n$ ו- $a_{n+1}\ne 0$ גוררים ביחד ש $\deg Q = n+1$, כאשר $Q_{(x)} := a_{n+1}x^{n+1} + \tilde{Q}_{(x)}$.