פיתרון תרגיל 2 - חדו"א 2

Note Title 09/03/2009

1) ב) (רעיון) שימו לב כי:

(i)
$$|\max\{f,g\}(x) - \max\{f,g\}(y)| \le$$
$$|f(x)-f(y)| + |g(x)-g(y)|$$

(ii) ומכיוון ש- f,g אינטג. נקבל בקלות חסום את התנודה של

א) דוגמה נגדית -

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$|f|$ הינה אינטג. לפי רימן מכיוון שזו הפונק' קבועה אך f אינה אינטג. לפי רימן.

ב) $f(x_0)>0$ ו- f רציפה ב- x_0

ולכן נוכל למצוא סביבה $N_\delta(x_0)=(x_0-\delta, x_0+\delta)$

כך ש- $N_\delta(x_0) \subseteq (a,b)$ וגם שלכל $x \in N_\delta(x_0)$

מתקיים - $f(x) \ge \frac{f(x_0)}{2} > 0$.

עתה נתבונן בפונק' -

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x_0)}{2} & x \in N_\delta(x_0) \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

זוהי פונק' אינטג' ע"פ רימן (מדרגה פר')

לפי סע' של ~~(קודם)~~ (נרכב) -

$$\boxed{X} \quad \int_a^b f(x)\,dx \underset{\uparrow}{\geq} \int_a^b g(x)\,dx = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{f(x_0)}{2}\,dx = 2\delta \cdot \frac{f(x_0)}{2} > 0$$

מונוטוניות האינטגרל

ב) (רעיון) יהי $\varepsilon > 0$ ונבחר $\delta > 0$ כך

שלכל $0 < |h| < \delta$: $\int_a^b |f(x+h) - f(x)|\,dx < \varepsilon$

f אינטג' ב- $[a-1, b+1]$ ולכן קיימת

חלוקה π של הקטע כך ש-

$$\omega(f, \pi) < \frac{\varepsilon}{2}$$

יהי $\delta = \min_{1 \le i \le n} \Delta x_i > |h| > 0$.

נסמן -

$$g(x) = |f(x+h) - f(x)|$$

יהיו $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ תגים כלשהם ונתבונן בסכום

נקבל -

$$S(g, \pi, \vec{t}) \underset{(*)}{\leq} 2\omega(f, \pi) < \varepsilon$$

(*) שימו לב ש-

$$g(t_i)=|f(t_i+h)-f(t_i)|$$

$$\le \left|\sup f([x_{i-1},x_i])-\inf f([x_{i-1},x_i])\right|+\left|\sup f[x_i,x_{i+1}] - \inf f[x_i,x_{i+1}]\right|$$

4) לכן נקבל.

5) א)

$$\int\frac{1}{2x^2+3x+2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+2\cdot\frac{3}{4}x+\frac{9}{16}+\frac{23}{16}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{(x+\frac{3}{4})^2+\frac{23}{16}}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{23}{16}}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x+\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{23}{16}}}\right)+C$$

ב)

$$\int\frac{x^4}{x^3-1}dx=\int x\,dx+\int\frac{x}{x^3-1}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}+\int\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}+\int\frac{A}{x-1}dx+\int\frac{Cx+D}{x^2+x+1}dx$$

מצאו A, C, D מקדמים וס״מן. :)

ג)

$$\int\frac{2x+1}{x(x-1)(x+2)}dx=\int\frac{A}{x}dx+\int\frac{B}{x-1}dx+\int\frac{C}{x+2}dx$$

מצאו את הקבועים.

ג)
$$\int \frac{dx}{e^{2x}+e^{x}-6} = \left[\begin{array}{l} t=e^{x} \\ dt=e^{x}dx \to \frac{dt}{t}=dx \end{array}\right]$$

$$\underset{\text{הצבה}}{\overset{\uparrow}{=}} \int \frac{dt}{t(t^2+t-6)} = \int \frac{dt}{t(t+3)(t-2)} =$$

$$= \int \frac{A}{t}\,dt + \int \frac{B}{t+3}\,dt + \int \frac{C}{t-2}\,dt$$

לא לשכוח בסוף להציב חזרה $t=e^{x}$!!

ה) + ו) פונק' ~~רציונלית~~ - כמו הסעיפים הראשונים.

ז)
$$\int \frac{dx}{\cos(x)} = \int \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)}\,dx =$$

$$= \int \frac{\cos(x)}{1-\sin^2(x)}\,dx = \left[\begin{array}{l} t=\sin(x) \\ dt=\cos(x)\,dx \end{array}\right]$$

$$\underset{\text{הצבה}}{\overset{\uparrow}{=}} \int \frac{dt}{1-t^2} = \int \frac{A}{1-t}\,dt + \int \frac{B}{1+t}\,dt = \ldots$$

ח)
$$\int \sin(ax)\cos(bx)\,dx = \frac{1}{2}\int \Big(\sin\big((a+b)x\big)+\sin\big((a-b)x\big)\Big)\,dx$$

ובאמת יוצא כבר מגיע סכום של אינט'.

מיידית.

ט)
$$\int \frac{1}{\cos^2(x)\sin^2(x)}\,dx = \int \frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\cos^2(x)\sin^2(x)}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx + \int \frac{1}{\sin^2(x)}\,dx = \tan(x)-\cot(x)+C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \begin{bmatrix} x = \frac{a}{\cos(t)} \\ dx = \frac{+a}{\cos^2(t)} \cdot \sin(t)\ dt \end{bmatrix}$$ ג)

$$= \int \frac{a\sin(t)\,dt}{\cos^2(t)\cdot\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2(t)}-a^2}} = \int \frac{a\sin(t)\,dt}{\frac{\cos^2(t)}{\cos(t)}\cdot a\sqrt{1-\cos^2(t)}}$$

$$= \int \frac{\cancel{a}\,\cancel{\sin}(t)\,dt}{\cos(t)\,\cancel{a}\,\cancel{\sin}(t)} = \int \frac{1}{\cos(t)}\,dt$$

ולפתור באותה דרך כמו בסעיף הקודם.

לפי תכונה / חאנה / x -

$$\int \frac{\sin(x)+2\cos(x)}{\sin^2(x)+3\sin(x)+2}\,dx = \underbrace{\int \frac{\sin(x)}{\sin^2(x)+3\sin(x)+2}\,dx}_{I_1}$$ ד׳)

$$+2\underbrace{\int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)+3\sin(x)+2}\,dx}_{I_2}$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} t=\sin(x) \\ dt = \cos(x)\,dx \end{bmatrix} \underset{\text{הצבה}}{=} \int \frac{dt}{t^2+3t+2} = \int \frac{dt}{(t+1)(t+2)}$$

ופיצול פשוט.

הצבה טריג׳

$$I_1 = \begin{bmatrix} t=\tan\left(\frac{x}{2}\right) & dx = \frac{2\,dt}{1+t^2} \\ \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} & \end{bmatrix}$$

$$= \int \frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2+3\cdot\frac{2t}{1+t^2}+2}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

מקווה שלא יהיה לכם כזה בבחינה!

ב')

$$\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{\cos(2x)}}\,dx = \int \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-2\sin^2(x)}}\,dx$$

$$= \left[\begin{matrix} t = \sin(x) \\ dt = \cos(x)\,dx \end{matrix}\right] = \int \frac{dt}{\sqrt{1-2t^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arcsin}\left(\sqrt{2}\,t\right) + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arcsin}\left(\sqrt{2}\,\sin(x)\right) + C$$

ג')

$$\int \tan^4(x)\,dx = \int \frac{\sin^4(x)}{\cos^4(x)}\,dx =$$

$$= \int \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)^4 \frac{2\,dt}{1+t^2} =$$

הצבה טריגו'

$$= \int \frac{32t^4}{(1-t^2)^4(1+t^2)}\,dt =$$

$$= \int \frac{32t^4}{(1-t)^4(1+t)^4(1+t^2)}\,dt =$$

מכאן, טכני לגמרי.

פונק' רציונאלית.

ד) נתון: F קדומה ל f. f הפיכה.

נזכור ש: $\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$

נגזור את הביטוי- (למה בכלל?)

$$\left(x f^{-1}(x) - F\left(f^{-1}(x)\right)\right)' =$$

$$= f^{-1}(x) + x\cdot\left(f^{-1}(x)\right)' - F'\left(f^{-1}(x)\right)\cdot\left(f^{-1}(x)\right)'$$

$$= f^{-1}(x) + x\cdot\left(f^{-1}(x)\right)' - f\left(f^{-1}(x)\right)\cdot\left(f^{-1}(x)\right)'$$

$$= f^{-1}(x) + x\left(f^{-1}(x)\right)' - x\left(f^{-1}(x)\right)' = f^{-1}(x)$$

ד*) f אינטגרבילית ב- $[a,b]$ ולכן בפרט חסומה בו.

יהי $M>0$ כך שלכל $x\in[a,b]$: $|f(x)|\leq M$.

g רציפה ב- $[-M,M]$ $(\subseteq \mathbb{R})$ ולכן לפי

משפט קנטור g רציפה במ"ש בקטע

הסגור $[-M,M]$. כמו כן g חסומה בקטע ע"י $N>0$ כלשהו.

עתה, יהי $\varepsilon>0$ ונבחר חלוקה π

של $[a,b]$ כך ש- $\omega(g,\pi)<\varepsilon$.

g רציפה במ"ש ולכן קיים $\delta>0$ כך שלכל

$x,y\in[-M,M]$ מתקיים: $|x-y|<\delta \Longrightarrow |g(x)-g(y)|<\frac{\varepsilon}{2M}$.

f אינט' ב- $[a,b]$ ולכן קיימת חלוקה π

של $[a,b]$ כך ש- $\omega(f,\pi)<\delta\cdot\varepsilon\cdot\frac{1}{4N}$

עתה נשים לב כי-

$$\frac{\delta\cdot\varepsilon}{4N} > \omega(f,\pi) = \sum_{\Delta f_i<\delta} \Delta f_i \cdot \Delta x_i + \sum_{\Delta f_i\geq\delta} \Delta f_i\, \Delta x_i$$

$$\geq \delta \cdot \sum_{\Delta f_i\geq\delta} \Delta x_i$$

$$\sum_{\Delta f_i\geq\delta} \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{4N} \qquad \Longleftarrow$$

סה"כ-

$$\omega(g\circ f,\pi) = \sum_{\Delta f_i<\delta} \Delta_i(g\circ f)\,\Delta x_i + \sum_{\Delta f_i\geq\delta} \Delta(g\circ f)\,\Delta x_i$$

$$< \frac{\varepsilon}{4M}\cdot 2M + 2N\cdot\frac{\varepsilon}{4N} = \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\boxtimes$