חדו"א 2 - פיתרון תרגיל 8

1 מתקיים:

(a) $\log\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left[\log(1+x) - \log(1-x)\right]$

נשים לב ש: $\left[\log(1+x)\right]' = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$

לכן (אינטגרציה איבר-איבר): $\log(1+x) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^{n+1}}{n+1}$

נציב $(-x)$: $\log(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$

$$\Rightarrow \log\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}-(-x)^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^m-(-x)^m}{m}$$

עבור m זוגי, האיברים הנ"ל מתאפסים, ועבור m אי-זוגי נקבל $\frac{1}{2}\cdot\frac{2x^m}{m}$, לכן:

$$\boxed{\log\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \sum_{m\in\mathbb{N}_{odd}}\frac{x^m}{m}}$$

רדיוס ההתכנסות הוא $\boxed{R=1}$, כמו של הטור $\sum x^n$ איתו התחלנו. לחילופין, ניתן לחשב: $\limsup\sqrt[n]{|a_n|} = 1$. (כאן: $a_{2n+1}=\frac{1}{2n+1}, a_{2n}=0$).

(b) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

$$x^2\cdot\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+3}}{2n+1} = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\cdot\frac{x^{2m+1}}{2m-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{(1+x^2)\cdot\arctan x} = (-1)^0\cdot\frac{x^1}{1} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot x^{2n+1}\cdot\left[\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}\right] = \boxed{x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot x^{2n+1}}{4n^2-1}\cdot 2}$$

רדיוס ההתכנסות כאן הוא שוב $\boxed{R=1}$, ושוב ע"י שני השיקולים כמו ב-(a).

(c) $\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \rightarrow \boxed{R=\infty}$

$\Rightarrow \frac{\sin t}{t} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{t^{2n}}{(2n+1)!} \longrightarrow$ רדיוס ההתכנסות של הטור הוא ∞!

(שים לב שהחלוקה ב-t איננה בעייתית כאן. מדוע? רמז - בדקו רציפות ב-$t=0$, או בדקו מה האיבר מהסדר הנמוך ביותר בפיתוח של $\sin t$.)

אינטגרציה איבר איבר

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n+1)!} \cdot \int_0^x t^{2n}\, dt =$$

$$= \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{R=\infty}\,.$$

בדקו $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$, עדיין

האם זה מפתיע ש- R לא השתנה? מה קורה לרדיוס ההתכנסות של טור חזקות כשעושים אינטגרציה/גזירה איבר-איבר? הוכח במשפט המתאים.

(d) שימו לב:
$$\frac{1}{(1-x)\cdot(1-x^2)} = \frac{1}{(1-x)^2\cdot(1+x)}$$

בתחילת הסמסטר התעסקנו בשברים כאלה. יש משפט שאומר שקיימים קבועים A,B,C כך ש:

$$\frac{1}{(1-x)^2\cdot(1+x)} = \frac{A}{(1-x)^2} + \frac{B}{(1-x)} + \frac{C}{1+x}$$

(באחד התרגילים הראשונים - כנראה שבוע 2 - חויתם בדיוק את המקרים שיש ומה המשפט מבטיח על הפירוק. כי הזדמנות להתרענן...).

נמצא את A,B,C;

$$\frac{A}{(1-x)^2} + \frac{B}{(1-x)} + \frac{C}{1+x} = \frac{A\cdot(1+x) + B\cdot(1-x)(1+x) + C\cdot(1-x)^2}{(1-x)^2\cdot(1+x)} = \frac{1}{(1-x)^2\cdot(1+x)}$$

נשווה מקדמים:

x^2: $B\cdot(-x^2) + C\cdot x^2 = 0 \Rightarrow B - C = 0 \Rightarrow \boxed{B = C}$

x: $Ax + \cancel{B\cdot 0} - 2C\cdot x = 0 \Rightarrow \boxed{A = 2C}$

1: $A + B + C = 1 \Rightarrow 2C + C + C = 4C = 1 \Rightarrow \boxed{C = \frac{1}{4}} \Rightarrow \boxed{B = \frac{1}{4}}\ \boxed{A = \frac{1}{2}}$

לכן:

$$\boxed{f(x)} = \frac{x}{(1-x)\cdot(1-x^2)} = \boxed{\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{(1-x)^2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{1-x} + \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{1+x}}$$

נכתוב טור חזקות לכל אחד מהמחוברים (בנפרד):

$$\frac{1}{(1-x)^2} = +\left(\frac{1}{1-x}\right)' = +\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n\cdot x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^n$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2}\cdot x^{n+1}} \quad , \quad \boxed{\frac{1}{4}\cdot\frac{x}{1-x}} = \frac{x}{4}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{4}}$$

$$\boxed{\frac{1}{4}\cdot\frac{x}{1+x}} = \frac{x}{4}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4}\cdot x^{n+1}}$$

ניתן לסכום את 3 המקדמים (ואחד מכל טור) כדי לקבל את $f(x)$.

(e) הפולינום $1-x+x^2$ לא פריק מעל $\mathbb{R}$ $(b^2-4ac=-3<0)$

אבל מעל $\mathbb{C}$ כן. נכתוב לגורמים מעל $\mathbb{C}$, ואח"כ, ברדיוס ההתכנסות,
נוכל להציב גם מספרים ממשיים. מתקיים:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{1}{2}\pm i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

נסמן $\varphi_0=\frac{\pi}{3}$ (60 מעלות), $z_0=e^{i\varphi_0}$, אז השורשים הם $z_0,\bar{z}_0$.

(הערה - לפולינום עם מקדמים ממשיים, אם יש שורשים מרוכבים אז הם תמיד מגיעים בזוגות צמודים. מדוע? נניח $P(x)=\sum_{k=0}^{N}a_k x^k$, $a_k\in\mathbb{R}$. אז $P(z)=\sum_{k=0}^{N}a_k\cdot z^k=0$ גורר $P(\bar{z})=\sum_{k=0}^{N}a_k\bar{z}^k=\overline{\sum_{k=0}^{N}a_k z^k}=0$.)

לכן:
$$\frac{1}{1-x+x^2}=\frac{1}{x^2-x+1}=\frac{1}{(x-z_0)\cdot(x-\bar{z}_0)}$$

נחשוב מעתה על הפונקציה הזו כפונקציה מ-$\mathbb{C}$, ולא מ-$\mathbb{R}$, וכרגיל, כדי להדגיש זאת, נקרא למשתנה z ולא x.

$$\frac{1}{(z-z_0)}\cdot\frac{1}{(z-\bar{z}_0)}=\frac{A}{z-z_0}+\frac{B}{z-\bar{z}_0}$$

שלב השוואת מקדמים:

$$(A+B)\cdot z=0\cdot z\Rightarrow A=-B$$

$$A\cdot(-\bar{z}_0)+B\cdot(-z_0)=1\Rightarrow A\cdot(z_0-\bar{z}_0)=A\cdot 2i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1\Rightarrow A=\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\cdot i\right)^{-1}=-\frac{i}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{A=\frac{-i}{\sqrt{3}}},\ \boxed{B=\frac{i}{\sqrt{3}}}\Rightarrow\left(A=\bar{B}\quad \text{שימו לב:}\right)$$

טור:

$$\frac{A}{z-z_0}=\frac{A}{z_0}\cdot\frac{1}{\left(\frac{z}{z_0}-1\right)}=\left(\frac{-A}{z_0}\right)\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{z}{z_0}}\right)=(-A\cdot\bar{z}_0)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z_0}\right)^n$$

$$\frac{B}{z-\bar{z}_0}=\frac{-B}{\bar{z}_0}\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{z}{\bar{z}_0}}\right)=(-B\cdot z_0)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\bar{z}_0}\right)^n$$

עבור הסכום, מתקיים: המקדם ה-n-י הוא:

$$(-A\cdot\bar{z}_0)\cdot\left(\frac{1}{z_0}\right)^n+(-Bz_0)\cdot\left(\frac{1}{\bar{z}_0}\right)^n=(-\bar{B}\bar{z}_0)\cdot(\bar{z}_0)^n+(-Bz_0)\cdot(z_0)^n=$$

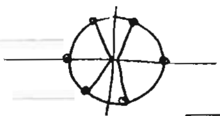
$$=-\left[Bz_0\cdot z_0^n+\overline{Bz_0\cdot z_0^n}\right]=-2\mathrm{Re}\{B\cdot z_0^{n+1}\}$$

כזכור $z_0=e^{i\varphi_0}$ לכן $z_0^{n+1}=e^{i(n+1)\varphi_0}$, ומכאן ש:

$$\mathrm{Re}\{B\cdot z_0^{n+1}\}=\mathrm{Re}\left\{\frac{i}{\sqrt{3}}\cdot\left(\cos(n+1)\varphi_0+i\cdot\sin(n+1)\varphi_0\right)\right\}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sin\left([n+1]\cdot\frac{\pi}{3}\right)$$

לכן:
$$\frac{1}{z^2-z+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sin\left([n+1]\cdot\frac{\pi}{3}\right)\cdot z^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$$

ל-$|a_n|$ מס' סופי של ערכים;



לכן $\limsup\sqrt[n]{|a_n|}=1$ ⇐ $\boxed{R=1}$. אם נציב מס' ממשי $-1<x<1$,

נקבל: $\boxed{\frac{1}{x^2-x+1}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot x^n}$, $\boxed{a_n=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left([n+1]\frac{\pi}{3}\right)}$, רדיוס ההתכנסות הוא 1.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

(f) $\sin^3 x = f(x)$

נכתוב

$$\cos(3x) + i\cdot\sin(3x) = e^{i3x} = (e^{ix})^3 = (\cos x + i\cdot\sin x)^3 =$$

$$= \cos^3 x + 3\cdot\cos^2 x\cdot i\cdot\sin x + 3\cdot\cos x\cdot(i\sin x)^2 + (i\sin x)^3 =$$

$$= \cos^3 x - 3\cdot\cos x\cdot\sin^2 x + i\cdot\left[3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x\right]$$

לכן (נשווה חלק מדומה):

$$\sin^3 x = 3\cdot\cos^2 x\sin x - \sin(3x) = 3\cdot(1-\sin^2 x)\cdot\sin x - \sin(3x)$$

$$\Rightarrow\ 4\cdot\sin^3 x = 3\cdot\sin x - \sin(3x)$$

$$\Rightarrow\ \sin^3 x = \frac{3}{4}\cdot\sin x - \frac{1}{4}\cdot\sin(3x)$$

נזכור, $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\cdot x^{2k+1}$, לכן מקדמי הטור $\boxed{\sin^3 x = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}\cdot x^{2k+1}}$

(פונ' אי-זוגית - אין מקדמים זוגיים) נתונים ע"י;

$$\boxed{a_{2k+1}} = \frac{3}{4}\cdot\frac{(-1)^k}{(2k+1)!} - \frac{1}{4}\cdot\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\cdot 3^{2k+1} = \boxed{\frac{3}{4}\cdot\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\cdot\left[1-3^{2k}\right]}$$

(2) (א) יש להניח כי $a:=\lim_{n\to\infty} a_n \geq 0$. אחרת הטענה לא נכונה.

(למשל אם $a_n\equiv -1$ סדרה קבועה, ו- $b_n=-\frac{1}{2},2,-\frac{1}{2},2,-\frac{1}{2},2,\dots$).

נסמן אם כן $a=\lim a_n$, $b=\limsup b_n$, ונתון כי $0\leq a$.

<u>כיוון ראשון:</u>

יהי $0<\varepsilon$. מהנתון, לכל $N\in\mathbb{N}$ קיים $n>N$ כך ש- $b_n>b-\left|\frac{\varepsilon}{a+b}\right|$, (אחרת b לא היה limsup של הסדרה $\{b_n\}$), וכן $a_n>a-\left|\frac{\varepsilon}{a+b}\right|$. (מסיבה דומה).

$$a_n\cdot b_n \geq \left(a-\left|\tfrac{\varepsilon}{a+b}\right|\right)\cdot\left(b-\left|\tfrac{\varepsilon}{a+b}\right|\right)=ab-\left|\tfrac{\varepsilon}{a+b}\right|\cdot(a+b)+\left|\tfrac{\varepsilon}{a+b}\right|^2>ab-\varepsilon$$

הראינו שלכל $0<\varepsilon$, ולכל $N\in\mathbb{N}$, יש $N<n$ כך ש- $a_nb_n>ab-\varepsilon$.

כלומר $\limsup(a_nb_n)\geq ab-\varepsilon$. זה נכון לכל $0<\varepsilon$ לכן $\boxed{\limsup(a_nb_n)\geq a\cdot b}$.

<u>כיוון שני:</u>

יהי $0<\varepsilon$. קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N\leq n$ $b_n<b+\varepsilon$ (אחרת ה- limsup היה יותר גדול מ- b). לכן: $a_n\cdot b_n\leq a_n\cdot(b+\varepsilon)$.

$$\Rightarrow \limsup(a_n\cdot b_n)\leq\limsup(a_n\cdot(b+\varepsilon))=\lim(a_n\cdot(b+\varepsilon))=(b+\varepsilon)\cdot a$$

כיוון שלכל $0<\varepsilon$; $\limsup(a_nb_n)\leq(b+\varepsilon)\cdot a$, נקבל $\boxed{\limsup(a_nb_n)\leq a\cdot b}$.

(ב) צריך להוכיח ש- $\limsup\sqrt[n]{|a_n|}=\limsup\sqrt[n]{|a_{n+1}|}$

כיוון ש- e^x פונקציה רציפה, מתקיים (כזכור מתרגול 1): $\lim e^{x_n}=e^{\lim x_n}$.

אך בנוסף, מתקיים $\limsup e^{x_n}=e^{\limsup x_n}$ (תחשבו, מדוע?).

לכן:

$$\limsup|a_n|^{\frac{1}{n}}=\limsup e^{\left(\ln|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)}=e^{\limsup\left(\ln|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)}$$

מנגד:

$$\limsup|a_{n+1}|^{\frac{1}{n}}=\limsup e^{\ln\left[|a_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}}\right]}=e^{\limsup\left(\frac{n+1}{n}\right)\cdot\left(\ln|a_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}}\right)}$$

הסדרה $\ln|a_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}}$ לא בהכרח מתכנסת, ולכן יש לה limsup, ו- $\left(\frac{n+1}{n}\right)\to 1$.

מ-(א) נובע $\limsup\left(\frac{n+1}{n}\right)\cdot\left(\ln|a_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}}\right)=\limsup\ln|a_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}}$, לכן:

$$\boxed{\limsup|a_{n+1}|^{\frac{1}{n}}}=\dots=e^{\limsup\ln|a_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}}}=\limsup|a_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}}=\boxed{\limsup|a_n|^{\frac{1}{n}}}.$$

רציפות e^x שוב.

□

רדיוס התכנסות $R=2$.

ⓐ $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{x}{2}} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{(1-\frac{x}{2})^2} \cdot \frac{1}{2}$$ ③

נציב $X=1$ בטוח (בתוך רדיוס ההתכנסות) ונקבל:

$$\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} \cdot \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2}$$

ⓑ $$\frac{1}{1-\frac{x}{3}} \overset{|x|<3}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} \overset{\text{גזירה}}{\Longrightarrow} \frac{1/3}{(1-\frac{x}{3})^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{3^n} \Rightarrow \frac{(\frac{x}{3})}{(1-\frac{x}{3})^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{3^n}$$

נעזר שוב, ונציב $X=1$;

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot x^{n-1}}{3^n}\Big|_{x=1} = \left[\frac{x/3}{(1-x/3)^2}\right]'\Big|_{x=1} =$$

$$= \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1-\frac{x}{3})^2} + \frac{x}{3} \cdot \frac{2/3}{(1-\frac{x}{3})^3}\right]\Big|_{x=1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(\frac{2}{3})^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{(2/3)}{(\frac{2}{3})^3} = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{(2/3)^2} = \frac{1}{(2/3)} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

ⓒ $$\frac{1}{1-\frac{x}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} \xrightarrow{\text{אינטגרציה}} -3 \cdot \ln\left|1-\frac{x}{3}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1) \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^{n-1}}$$

$$\Longrightarrow -\ln\left|1-\frac{x}{3}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n} = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n \cdot 3^n}$$

$$-\frac{\ln|1-\frac{x}{3}|}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n \cdot 3^n}$$

$$\int_0^x -\frac{\ln(1-\frac{t}{3})}{t} \cdot dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n} \int_0^x t^{n-1} \cdot dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 \cdot 3^n}$$ אינטגרציה איבר-איבר;

רדיוס התכנסות של הטור האחרון נכון הוא הרדיוס של הטור שממנו התחלנו ($\sum \frac{x^n}{3^n}$), והוא שווה ל- 3 . לכן ניתן להציב $X=1$ ולקבל:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot 3^n} = -\int_0^1 \frac{\ln(1-\frac{t}{3})}{t} \cdot dt}$$

זוהי התשובה (עד כדי אינטגרציה של הביטוי הזה↑, כמובן).

4 (א) אם $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ אז $f''(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2}\cdot(k+2)(k+1)\cdot x^k$

מהשוואת מקדמים מכל סדר נקבל משוואה רקורסיבית: $a_{k+2}=\frac{a_k}{(k+1)\cdot(k+2)}$.

נשים לב, נתון: $a_0=f(0)=0$, $a_1=f'(0)=1$.

לכן כל המקדמים הזוגיים מתאפסים (באינדוקציה), והמקדמים האי-זוגיים מקיימים $a_k=\frac{1}{k!}$ (גם באינדוקציה).

$$\Rightarrow \boxed{f(x)=\sum_{k\in\mathbb{N}_{odd}} \frac{x^k}{k!}}$$

<u>הערה:</u> זהו החלק האי-זוגי של הטור $e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$. בדוק שנית

לכתוב $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$. $f(x)$ נקראת $\sinh(x)$. באופן דומה, החלק הזוגי של e^x נקרא: $\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

(ב) באופן דומה נקבל $a_{k+2}=\frac{-a_k}{(k+1)\cdot(k+2)}$, $a_0=1$, $a_1=1$.

לכן; (אינדוקציה...): $\boxed{a_{2k+1}=\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}}$, $\boxed{a_{2k}=\frac{(-1)^k}{(2k)!}}$

שימו לב שטורים מוכרים; $\cos(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\cdot x^{2k}$, $\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$

לכן: $\boxed{f(x)=\cos x+\sin x}$.

5 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot x^n$, $a_0=1$, והטור מתכנס ברדיוס $0<R$ כלשהו.

תחילה נראה כי קיים $M\in\mathbb{R}$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$; $|a_n|\le M^n$.

כיוון ש- $\limsup\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{R}<\infty$, נדע שהחל ממקום מסוים, N_0; $|a_n|<\left(\frac{1}{R}+1\right)^n$.

ניקח M כך ש- $\max\{|a_1|^{\frac{1}{1}},\dots,|a_{N_0}|^{\frac{1}{N_0}},(\frac{1}{R}+1)\}\le M$

לכן לכל $n\in\mathbb{N}$; $|a_n|^{\frac{1}{n}}\le M$, אז כמובן $\boxed{|a_n|\le M^n}$.

הגדרנו את $b_0=1$ וברקורסיה; $b_n=-\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot b_{n-k}$.

נוכיח כי לכל n; $|b_n|\le(2M)^n$. איך? באינדוקציה;

ל.ה.ו.ה.

$$|b_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_{n-k}\right| \le \sum_{k=1}^{n} |a_k|\cdot|b_{n-k}| \overset{\downarrow}{\le} \sum_{k=1}^{n} |a_k|\cdot(2M)^{n-k} \le \sum_{k=1}^{n} M^k \cdot (2M)^{n-k}$$

$$= M^n \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{2^n}{2^k} = (2M)^n \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} < (2M)^n$$

הראינו $\boxed{|b_n| \le (2M)^n}$

לכן $|b_n|^{\frac{1}{n}} \le 2M$, ולכן כי $\limsup |b_n|^{\frac{1}{n}} \le 2M$, לכן יש רדיוס התכנסות R_B

לטור $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot X^n$, ומתקיים $\boxed{\frac{1}{2M} \le R_B}$. (אם נסמן את הרדיוס המקורי,

של $\Sigma a_n X^n$, ב- R_A, הרי שמתקיים:

$$\frac{1}{R_A} < \frac{1}{R_A} + 1 \le M < 2M \implies \boxed{\frac{1}{2M} \le R_A}$$

לכן, ל- $|X| < \frac{1}{2M}$, גם הטור $\Sigma a_n X^n$ וגם $\Sigma b_n X^n$ מתכנסים.

טור המכפלה מקיים:

$$\left(\Sigma a_n X^n\right)\left(\Sigma b_n X^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n X^n \quad ; \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}$$

אבל לכל $n \ge 1$,

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} = a_0 \cdot b_n + \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_{n-k} = b_n - b_n = 0$$

ועבור $n=0$,

$$C_0 = a_0 \cdot b_0 = 1$$

כלומר הטור המתקבל שווה ל-1, $\sum_{n=0}^{\infty} C_n X^n \equiv 1$. ולכן, כיוון שאנחנו ברדיוס ההתכנסות, $\Sigma a_n X^n = f(x)$, נקבל:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n = \frac{1}{f(x)}}$$

(6) $a_1 = a_0 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $\forall n \ge 0$. $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = \{1,1,2,3,5,\dots\}$

$$(1 - x - x^2) \cdot f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^{n+2} = a_0 X^0 + a_1 X^1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n X^n$$

$$- a_0 X^1 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n X^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^{n+2} = 1 + x - x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n X^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} X^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} X^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{(a_n - a_{n-1} - a_{n-2})}_{0} \cdot X^n = 1$$

כשאיברי הטור האחרון מתאפסים, כי לכל $n \ge 2$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

לכן ברדיוס ההתכנסות, מתקיים:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot X^n = \frac{1}{1 - X - X^2}}$$

- פירוק לשברים משולבים, שורשי הפולינום $x^2 + x - 1$ הם:

$$X_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

נסמן $\phi = \frac{+1+\sqrt{5}}{2}$, אז $\phi^2 = \phi + 1$. ϕ הוא קבוע מפורסם.

שורשי הפולינום שלנו מקיימים, לאמת זאת, $x^2 = -x+1$.

בדקו ששני השורשים הם $-\phi$, $\frac{1}{\phi}$. לכן:

$$\frac{1}{1-x-x^2} = \frac{A}{x+\phi} + \frac{B}{x-\phi^{-1}} = \frac{x\cdot(A+B) + B\phi - A\phi^{-1}}{(1-x-x^2)\cdot(-1)}$$

נשווה מקדמים:

$$x^0: \quad B\phi - A\phi^{-1} = -1 \Rightarrow \boxed{B\phi^2 - A + \phi = 0}$$

$$x^1: \quad A+B=0 \Rightarrow \boxed{A=-B}$$

$$\Rightarrow B\cdot(\phi+1) - A + \phi = B\phi + \phi + B - A = \phi\cdot(B+1) + 2B = B\cdot(2+\phi) + \phi = 0$$

$$\Rightarrow B = \frac{-\phi}{\phi+2} = \frac{-1}{1+\frac{2}{\phi}} \overset{\frac{1}{\phi}=\phi-1}{=} \frac{-1}{1+2(\phi-1)} = \frac{-1}{2\phi-1} \overset{\left(\phi=\frac{1+\sqrt5}{2}\right)}{=} \frac{-1}{\sqrt5}$$

$$\Leftarrow \quad \boxed{A=\frac{1}{\sqrt5}} \quad , \quad \boxed{B=\frac{-1}{\sqrt5}} \, .$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot x^n = \frac{1}{\sqrt5}\cdot\left(\frac{1}{\phi+x}\right) + \frac{1}{\sqrt5}\cdot\left(\frac{1}{\phi^{-1}-x}\right) = \frac{1}{\sqrt5}\cdot\left[\frac{1}{\phi}\cdot\left(\frac{1}{1+x/\phi}\right) + \frac{1}{\phi^{-1}}\cdot\left(\frac{1}{1-x\phi}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt5}\cdot\left[\phi^{-1}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{\phi^n} + \phi\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(x\phi)^n\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n = \frac{1}{\sqrt5}\cdot\left[\phi^{(n+1)} - \left(\frac{-1}{\phi}\right)^{n+1}\right]}$$

ז) נסמן את סדרת הסכומים החלקיים של הטור ההרמוני; $H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

נסמן גם את הסכומים של האיברים הזוגיים והאי-זוגיים באופן דומה;

$$H^o_n = \sum_{\substack{k=1\\ k\in\mathbb{N}\,odd}}^{n}\frac{1}{k} \quad , \quad H^e_n = \sum_{\substack{k=1\\ k\in\mathbb{N}\,even}}^{n}\frac{1}{k}$$

(even - זוגי
odd - אי-זוגי)

נתונות לנו העובדות הנכונות הבאות:

$$\left(H_n - \log n - \gamma\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\left(H^o_n - H^e_n\right) \xrightarrow{n\to\infty} \ln 2 \, .$$

ח) החלקיות היא כזו; 2 אי-זוגיים, אחד זוגי, 2 אי-זוגיים, אחד זוגי....

לכן עד S_{3n}, עברנו על $2n$ אי-הזוגיים הראשונים ו-n הזוגיים הראשונים:

$$S_{3n} = H^o_{4n} - H^e_{2n} = (H^o_{2n} - H^e_{2n}) + (H^o_{4n} - H^o_{2n}) = (H^o_{2n} - H^e_{2n}) + (H_{4n} - H_{2n}) - (H^e_{4n} - H^e_{2n})$$

נסתכל על כל מחובר מבין שלושת הסוגריים בנפרד;

$(*)$ $H^o_{2n} - H^e_{2n} \xrightarrow{n\to\infty} \ln 2$ (נתון).

$(*)$ $H_{4n} - H_{2n} = (H_{4n} - \log 4n - \gamma) - (H_{2n} - \log 2n - \gamma) + \log(4n) - \log(2n) \to 0 + 0 + \log 2 = \ln 2$

בשביל החלק האחרון, נשים לב ש- $H^e_{2n} = \frac{1}{2}\cdot H_n$, כי $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1}+\dots+\frac{1}{n}\right)$,

לכן:

$(*)$ $H^e_{4n} - H^e_{2n} = \frac{1}{2}\cdot(H_{2n} - H_n) = \frac{1}{2}\cdot\left[(H_{2n} - \log 2n) - (H_n - \log n) + \log\left(\frac{2n}{n}\right)\right] \to \frac{1}{2}\left[\gamma - \gamma + \ln 2\right] = \frac{1}{2}\ln 2$

ובסה"כ;

$$\boxed{S_{3n}} \to \ln 2 + \ln 2 - \frac{1}{2}\ln 2 = \boxed{\frac{3}{2}\cdot\ln 2}$$

כיוון ש; $a_n \to 0$ (איבר כללי של הטור), ו- S_{3n} מתכנס ל- $\frac{3}{2}\ln 2$, זהו סכום הטור. (זו טענה כללית לסדרות, ניקח מס' שלם כלשהו, נניח 7. אם S_{7n} מתכנסת, ו- $a_n \to 0$, אז S_n מתכנס).

ב) הפעם הסדר השתנה, וזה ישפיע על סכום הטור, כיוון שהוא לא מתכנס בהחלט. הפעם עד S_{3n} עברנו על n האי-זוגיים הראשונים, ו-2n הזוגיים הראשונים;

$$S_{3n} = H^o_{2n} - H^e_{4n} = (H^o_{2n} - H^e_{2n}) - (H^e_{4n} - H^e_{2n}) = (H^o_{2n} - H^e_{2n}) - \frac{1}{2}\cdot(H_{2n} - H_n)$$

כמו קודם (למעשה זה מטפל בכרכריות לגמרה), נסכום, והפעם נקבל;

$$\boxed{S_{3n}} \to \ln 2 - \frac{1}{2}\cdot\ln 2 = \boxed{\frac{1}{2}\cdot\ln 2}$$

וזהו סכום הטור.

8) א) $\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|$ ו- $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ הם טורים מתכנסים. הטענה שיש כאן, היא שזנב של טור מתכנס, הולך ויותר קטן, אם לוקחים את הזנב ממקום יותר ויותר גדול, ולמעשה, שהוא שואף לאפס.

נוכיח רק לגבי הזנב $B_n = \sum_{k=n}^{\infty} b_k$. נסמן $S_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$.

ידוע כי $S_n \xrightarrow{n\to\infty} B$ (הטור מתכנס וסכומו B). נשים לב שבטענה שרוצים להוכיח יש גבול כפול; B_n, ל- n נתון, נגיד n=100, הוא טור אינסופי. למשל, B_0 זה הטור המקורי שלנו, לכן $B_0 = B$. ב- n=2, $B_2 = B - S_1$. ובאופן כללי $B_n = B - S_{n-1}$, כי:

$$B_n = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=n}^{N} b_k = \lim_{N\to\infty}(S_N - S_{n-1}) = \left(\lim_{N\to\infty} S_N\right) - S_{n-1} = B - S_{n-1}$$

אם ניקח גבול עכשיו, $n\to\infty$, נקבל;

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty}(B - S_{n-1}) = B - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = B - B = 0.$$

שימו לב, העובדה היחידה שבה השתמשנו היא ש- $\sum b_k$ מתכנס. ☒

ב) רוצים להוכיח ש- $\left|\sum_{i=0}^{n} a_i B_{n-i}\right|$ הוא קטן, אם n מספיק גדול.

יהי $0<\varepsilon$.

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס (בהחלט), לכן $a_k \to 0$. כמו כן $B_k \to 0$ (נובע מ- תר' 12).

ניקח N_1, שאחריו, ל- $N_1<k$, $|B_k|<\varepsilon/A_1$, כש- $A_1=\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|$.

נגדיר $B_1=\sum_{k=0}^{N_1}|B_k|=\sum_{i=n-N_1}^{n}|B_{n-i}|$, שזה רק נראה תלוי ב-n, אבל זה לא באמת תלוי ב-n.

ניקח N_2, שאחריו, ל- $N_2<i$, $|a_i|<\varepsilon/B_1$.

נגדיר $N=N_1+N_2$. אז לכל $N<n$, מתקיים:

$$\left|\sum_{i=0}^{n} a_i B_{n-i}\right| \le \sum_{i=0}^{n}|a_i B_{n-i}| = \sum_{i=0}^{n-N_1-1}|a_i B_{n-i}| + \sum_{i=n-N_1}^{n}|a_i B_{n-i}| \le$$

כשכאן יכולנו לפרק את הסכום כך כי $N_1 \le N < n$.

נשים לב שבסכום הראשון, $i<n-N_1$, לכן $N_1<n-i$, לכן $|B_{n-i}|<\varepsilon/A_1$, ואילו בסכום השני, $N_2=N-N_1<n-N_1\le i$, כלומר $N_2<i$, לכן $|a_i|<\varepsilon/B_1$. בסה"כ;

$$\le \sum_{i=0}^{n-N_1-1}|a_i|\cdot\left(\varepsilon/A_1\right) + \sum_{i=n-N_1}^{n}|B_{n-i}|\cdot\left(\varepsilon/B_1\right) = \frac{\varepsilon}{A_1}\cdot\sum_{i=0}^{n-N_1-1}|a_i| + \frac{\varepsilon}{B_1}\cdot B_1 \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{A_1}\cdot\underbrace{\sum_{i=0}^{\infty}|a_i|}_{=A_1} + \varepsilon = 2\varepsilon$$

כלומר, לכל $0<\varepsilon$ יש $N\in\mathbb{N}$, כך ש- $N<n \Rightarrow \left|\sum_{i=0}^{n} a_i B_{n-i}\right|<2\varepsilon$. ▨.

ג) נשתמש ברמז, ונקבל;

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} d_n = \lim_{N\to\infty}\left[B\cdot\sum_{n=0}^{N}a_n - \sum_{n=0}^{N}a_n\cdot B_{N+1-n}\right] =$$

$$= B\cdot\left(\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}a_n\right) - \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{N}a_n\cdot B_{N+1-n}\right)$$

האיבר הראשון שואף ל- $B\cdot A$; יש להראות שהאיבר השני מתאפס.

ב-ב) הראינו ש- $\sum_{n=0}^{N+1}a_n\cdot B_{N+1-n}\xrightarrow{N\to\infty}0$, כיון שזה אותו דבר, עד כדי $a_{N+1}\cdot B_0$, ו- $a_{N+1}\xrightarrow{N\to\infty}0$. לכן הוכחנו את משפט Martens. ▨.

(9) (א) סכימה בחלקים - מתקיים:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k \cdot f_k(x) + \sum_{k=m}^{n-1} A_k \cdot \left(f_{k+1}(x) - f_k(x)\right) = A_n \cdot f_n(x)$$

	a_m	...	...	a_n
$f_m(x)$				
$f_{m+1}(x) - f_m(x)$				
$\vdots$				
$f_n(x) - f_{n-1}(x)$				

- כדי להשתכנע בכך, חשבו על הטבלה הבאה;
בכל תא יש את המכפלה של a_k המתאים בהפרש
$(f_{k+1}(x)-f_k(x))$ המתאים - כתלות במיקום השורה והעמודה.

- בכדי להוכיח זאת, ל- m נתון, השתמשו באינדוקציה.

בכל אופן, אחרי שהוכחתם שזה נכון, השתכנעתם, והבנתם את הנוסחה, נמשיך:

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k \cdot f_k(x)\right| \le \left|A_n \cdot f_n(x)\right| + \left|\sum_{k=m}^{n-1} A_k \cdot \left(f_{k+1}(x) - f_k(x)\right)\right|$$

נחסום כל ביטוי בנפרד, ונשים לב, שכיוון של $x \in E$ נתון, $\{f_k(x)\}$ מונוטונית,
נקבל שההפרשים $(f_{k+1}(x)-f_k(x))$ הם בעלי אותו סימן ל- $m \le k \le n-1$. לכן:
(נניח, בה"כ, שהסימן חיובי.)

$$\left|\sum_{k=m}^{n-1} A_k \left(f_{k+1}(x) - f_k(x)\right)\right| \le \sum_{k=m}^{n-1} |A_k| \cdot \left(f_{k+1}(x) - f_k(x)\right) \le$$

$$\le \left(\max_{m \le k < n} |A_k|\right) \cdot \left(\sum_{k=m}^{n-1} f_{k+1}(x) - f_k(x)\right) = \left(\max_{m \le k < n} |A_k|\right) \cdot \left(f_n(x) - f_m(x)\right)$$

לכן:

$$\left|\sum_{k=m}^{n-1} A_k \left(f_{k+1}(x) - f_k(x)\right)\right| \le 2 \cdot \left(\max_{m \le k \le n} |A_k|\right) \left(\sup_{\substack{x \in E \\ m \le k \le n}} |f_k(x)|\right)$$

(האיבר הנוסף מקיים רק:)

$$\left|A_n \cdot f_n(x)\right| \le \left(\max_{m \le k \le n} |A_k|\right) \cdot \left(\sup_{\substack{x \in E \\ m \le k \le n}} |f_k(x)|\right)$$

נסמן, לכל $n \in \mathbb{N}$; $\|f_n\| = \sup_{x \in E} |f_n(x)|$. אז קיבלנו, בסה"כ, שמתקיים:

$$\boxed{\left|\sum_{k=m}^{n} a_k \cdot f_k(x)\right| \le 3 \cdot \left(\max_{m \le k \le n} |A_k|\right) \cdot \left(\max_{m \le k \le n} \|f_k\|\right)}$$ ☒

הערה - הנתון; f_n מתכנסת במ"ש לאפס ב- E, פירושו $\sup_{x \in E} |f_n(x) - 0| \xrightarrow{n \to \infty} 0$,
כלומר $\|f_n\| \xrightarrow{n \to \infty} 0$, לפי הסימון האחרון שהוספנו.

(ב) לפי קריטריון קושי להתכנסות במ"ש של (טור) פונקציות,

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot f_n(x)$ מתכנס במ"ש אמ"מ לכל $\varepsilon>0$, יש $N\in\mathbb{N}$,

כך ש- $N<m,n$ $\Leftarrow$ $\left\|\sum_{k=m}^{n} a_k \cdot f_k\right\| < \varepsilon$.

יהי $\varepsilon>0$. נסתכל על החסם M של סדרת הסכומים החלקיים של $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$.

לכל $m,k\in\mathbb{N}$, מתקיים;

$$|A_k| = \left|\sum_{l=m}^{k} a_l\right| = \left|\sum_{l=1}^{k} a_l - \sum_{l=1}^{m-1} a_l\right| \le M+M = 2M$$

ניקח $N\in\mathbb{N}$ כך שעבור $N<n$, $\|f_n\|\le \frac{\varepsilon}{6M}$. יהיו n,m. $N<m,n$. אז;

$$\forall x\in E.\quad \left|\sum_{k=m}^{n} a_k f_k(x)\right| \overset{(א)}{\le} 3\cdot\left(\max_{m\le k\le n}|A_k|\right)\cdot\left(\max_{m\le k\le n}\|f_k\|\right) \le 3\cdot 2M\cdot\frac{\varepsilon}{6M} = \varepsilon$$

לכן קריטריון קושי מתקיים. $\boxtimes$

(ג) נגדיר $f_n(x)=\frac{1}{n+x}$; $E=[0,\infty)$.

לכל $x\in E$; $|f_n(x)| = \left|\frac{1}{n+x}\right| \le \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

לכן f_n היא סדרת פונקציות המתכנסת לאפס במ"ש ב- E.

נגדיר $a_n=(-1)^n$. סדרת הסכומים החלקיים שלה היא אכן חסומה.

נסיק מ- (ב) שהטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ מתכנס במ"ש ב- E. $\boxtimes$