חדו"א 2 - פיתרון תרגיל 10

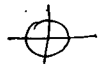
1 א) נכון. אם $\{U_i\}_{i=1}^{m}$ הן m קבוצות פתוחות ב-$\mathbb{R}^n$,
נסמן $U=\bigcap_{i=1}^{m} U_i$ את החיתוך. $x\in U$ $\Leftarrow$ יש כדור סביב x
בתוך כל אחת מהקבוצות, כי $x\in U_i$ לכל i. כלומר $\forall i.\ x\in B(x,r_i)\subseteq U_i$
ניקח $r=\min_{1\le i\le m}\{r_i\}$, אז $B(x,r)\subseteq U_i$ לכל U_i, ולכן $x\in B(x,r)\subseteq U$.
x הייתה נקודה כלשהי, לכן הוכחנו שסביב כל נקודה ב-U, יש כדור המוכל ב-U. $\Leftarrow$ U פתוחה. ☒

ב) לא נכון. למשל, $U_k=(-\frac{1}{k},\frac{1}{k})$ לכל $k\in\mathbb{N}$.
U_k כולן פתוחות, אבל $\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k=\{0\}$ היא קבוצה לא פתוחה. (היא סגורה, אגב).

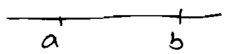
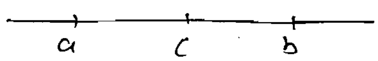
ג) נעבוד עם ההגדרה הבאה של קבוצה סגורה ב-$\mathbb{R}^n$; קבוצה A היא סגורה $\iff$
לכל סדרה מתכנסת $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}\subseteq A$, גם הגבול, $x=\lim x_k$, שייך ל-A.
- סגורות, אם $\{F_s\}_{s\in I}$ הן קבוצות סגורות (I היא קבוצת האינדקסים - ולא מניחים דבר על העוצמה שלה; לא שהיא סופית ולא שהיא בת-מנייה),
נסמן את החיתוך כ- $F=\bigcap_{s\in I} F_s$. נניח ש- $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}\subseteq F$ היא
סדרה מתכנסת. כיוון שלכל $s\in I$; $F\subseteq F_s$, נובע ש- $\{x_k\}\subseteq F_s$, לכל s,
ולכן הגבול, $x=\lim x_k$, גם ב-F_s; $x\in F_s$. אם x נמצא בכל ה-F_s-ים
אז הוא גם בחיתוך; $x\in F_s$. ☒

2 א) הקבוצה: $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y\neq 4\}$, היא פתוחה. נתבונן במשלים
שלה, $B:=A^c$, כדי להראות זאת. יש להראות כי $B=\{(x,y) : x+y=4\}$ היא
קבוצה סגורה. נניח ש- $\left\{\binom{x_n}{y_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ היא קבוצה חלקית ל-B, (שהיא) סדרה
מתכנסת. כלומר $\binom{x_n}{y_n}\xrightarrow{n\to\infty}\binom{x_0}{y_0}$. צריך להוכיח $\binom{x_0}{y_0}\in B$. נתון כי
$x_n\to x_0$, $y_n\to y_0$ (זכרו, כי התכנסות של סדרת וקטורים $\{x_k\}$ ב-$\mathbb{R}^n$,
לוקטור x_0, שקולה להתכנסות של כל אחת מהקורדינטות, לקורדינטה של x_0. כלומר
$\vec{x}_k\to\vec{x}_0 \iff x_k^1\to x_0^1,\ \dots,\ x_k^n\to x_0^n$).
כיוון שלכל $n\in\mathbb{N}$, $x_n+y_n=4$, אם ניקח גבול נקבל $x_0+y_0=4$,
כלומר $\binom{x_0}{y_0}\in B$. B סגורה $\Leftarrow$ A פתוחה. ☒

(ב) הקבוצה $A=\mathbb{Q}^2$ היא לא פתוחה ולא סגורה. היא לא פתוחה
כי אם ניקח נקודה כלשהי ב-A, נניח את $(0,0)$, אז בכל כדור, קטן ככל
שיהיה, סביב $(0,0)$, יש נקודות עם קורדינטות אי-רציונליות.
היא לא סגורה כי ניתן "לצאת ממנה" ע"י גבול; נניח ש- $x_n \to \sqrt{2}$
היא סדרת רציונלים (אפשר לחשוב מדוע יש כזו), אז $(0,x_n)\to(0,\sqrt{2})$ היא
סדרה ב-A, שגבולה הוא לא ב-A.

(ג) $A=S^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$.  . זו קבוצה סגורה;
אם x_n, y_n שתי סדרות ממשיות מתכנסות, ומתקיים $x_n^2+y_n^2=1$ לכל n,
כלומר $\binom{x_n}{y_n}\in A$, אז $(\lim x_n)^2+(\lim y_n)^2=1$, לכן גם $\binom{\lim x_n}{\lim y_n}\in A$.

(ד) נניח ש- $\left\{\binom{x_n}{\sin x_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה מתכנסת; $\binom{x_n}{\sin x_n}\longrightarrow\binom{a}{b}$.
מרציפות פונקציית $\sin$, $x_n\to a \Rightarrow \sin x_n\to\sin a$, לכן $b=\sin a$.
כיוון ש- $\binom{a}{\sin a}\in A$, סיימנו: A סגורה.

(3) נניח ש- A קבוצה פתוחה וסגורה. נסמן $B=\mathbb{R}\setminus A$. אז גם
B פתוחה וסגורה (סגורה - כי היא המשלים של A-הפתוחה,
ופתוחה, כי היא המשלים של A-הסגורה...).
האיחוד הזר של A ו- B הוא הכל; $A\dot\cup B=\mathbb{R}$.
- כלומר, שהטענה שקולה לכך שאין 2 קבוצות זרות, פתוחות,
ולא ריקות; A, B, כך ש- $A\cup B=\mathbb{R}$.
- בכל אופן, נמשיך. אם כן נניח, בשלילה, כי $A\neq\mathbb{R}$ ו- $A\neq\emptyset$,
נקבל ש- A לא ריקה ו- B לא ריקה. יהיו $a\in A$, $b\in B$.
(קיימים, כי הקבוצות לא ריקות). בה"כ; $a<b$. 
נסמן; $M=\{x\in A : x<b\}$. לחלופין; $M=A\cap(-\infty,b)$.
M קבוצה לא ריקה ($a\in M$) וחסומה מלמעלה (ע"י b). לכן יש לה
חסם עליון; נסמן $c=\sup M$. 

עכשיו אנחנו מוכנים להגיע לסתירה;

- מצב אחד; $c\in A$, כי $c=\sup M$; כלומר יש סדרה ב-M, $\{x_n\}$, כך ש- $x_n\to c$. אבל $M\subseteq A$, לכן $\{x_n\}$ היא סדרה ב-A. A קבוצה סגורה, לכן מכילה את נקודות הגבול שלה, $c\in A$

- מצב שני; $c\notin A$. לכן c היה ב-A, אז מכך שהיא פתוחה, היה קטע $(c-\varepsilon,c+\varepsilon)\subseteq A$ ("כדור", במימד אחד). כיוון ש- $b\in A$, נקבל, למשל, ש- $c<c+\frac{\varepsilon}{2}<b$, לכן c הוא לא ה-sup של M. (כי $c+\frac{\varepsilon}{2}$ הוא ב-M והוא גדול ממש מ-c).

לכן הגענו לסתירה, מה שאומר שלא ייתכן שגם A וגם B לא ריקות;

או ש-B ריקה; ואז $A=\mathbb{R}$ (וסיימנו),

או ש-A ריקה; ואז $A=\emptyset$ (ושוב סיימנו). ■

(4) הטענה; $A\subseteq\mathbb{R}^n$ היא קבוצה פתוחה וסגורה. נחזור על אותו הרעיון של ההוכחה; נניח בשלילה ש-A לא ריקה, כלומר יש מישהו $a\in A$, אך גם נניח, ש-A היא לא כל $\mathbb{R}^n$, כלומר שיש מישהו $b\notin A$. נסתכל על הקטע המחבר ביניהם; $[a,b]\subseteq\mathbb{R}^n$.

(תזכורת; ב-$\mathbb{R}^n$, הקטע בין a ל-b ניתן ע"י: $\{t\cdot a+(1-t)\cdot b : 0\le t\le 1\}$)

נגדיר, באופן אנלוגי; $M=\{t\in[0,1] ; [t\cdot a+(1-t)\cdot b]\in A\}$

M לא ריקה, כי $1\in M$, והיא חסומה מלרע (מלמטה), ע"י 0.

לכן, יש לה חסם תחתון; נסמן $t_0=\inf M$.

ונגדיר $c=t_0\cdot a+(1-t_0)\cdot b$. מה שעשינו הוא לתרגם את הבעיה מ-$\mathbb{R}^n$ (דרך הפרמטריזציה של הקטע $[a,b]$) לבעיה החד-מימדית, שכבר חזינו איך פותרים.

שוב; <u>מצב אחד</u>; $c\in A$, כי יש $t_n\in M$ כך ש- $t_n\to t_0$ כי הוא חסם מלרע, אבל אז $(t_n\cdot a+(1-t_n)b)\in A$ (מהגדרת M), וכיוון ש-A סגורה, היא מכילה את נקודת הגבול; $t_n\cdot a+(1-t_n)b\to\underline{t_0\cdot a+(1-t_0)\cdot b}\in A$

<u>ומצב שני</u>; $c\in A$, כי A פתוחה. לכן היה ש"ק ל-A, היה כדור סביב c, שכולו ב-A, מה שאומר שהיה אפשר להקטין קצת את t_0 - בסתירה לכך

ש-f_0 הוא האינפימום.

5. א. תהי $X \subseteq \mathbb{R}^n$, ונסמן ב- $Acc(X)$ את קבוצת נקודות ההצטברות שלה, כלומר אוסף כל נקודות הגבול שניתן לקבל (מבלי להשתמש בנק' עצמה).
כלומר, $x \in Acc(X)$ אם יש סדרה $\{x^m\} \subseteq X \setminus \{x\}$, כך ש- $x^m \to x$.

- נוכיח שהיא סגורה. נניח ש- $\{x_n\} \subseteq Acc(X)$ היא סדרה מתכנסת, $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$. נרצה להראות ש- $x \in Acc(X)$.
[ברור שאפשר להניח $x_n \neq x$ לכל n; אחרת סיימנו].
לכל n, $x_n \in Acc(X)$, כלומר יש סדרה $\{x_n^m\} \subseteq X \setminus \{x_n\}$ כך ש- $x_n^m \xrightarrow{m\to\infty} x_n$.
לכל n ניקח $m_{(n)}$ ⊛ כך ש- $|x_n^{m_{(n)}} - x_n| < \frac{1}{n}$. טענה:
הסדרה $\{x_n^{m_{(n)}}\}_{n=1}^\infty$ מתכנסת וגבולה הוא x.

הוכחה: יהי $\varepsilon>0$. קיים $N \in \mathbb{N}$ שאחריו (מתי); $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$.
מתקיים:
$$|x_n^{m_{(n)}} - x| \le |x_n^{m_{(n)}} - x_n| + |x_n - x| < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
לכן $x \in Acc(X)$.

הערה - למעשה בסימון הזה, צריך לא רק ש- $x_n^{m_{(n)}} \longrightarrow x$ וש- $\{x_n^{m_{(n)}}\} \subseteq X$, אלא גם ש- $x_n^{m_{(n)}} \neq x$ לכל n. כי לנקודות הצטברות מתקרבים עם איברים מהקבוצה, אבל ששונים ממש מהנקודה. חשבו מדוע זה לא מפריע - איפה היה אפשר להוסיף בהוכחה את ההערה המתאימה.
רמז - איפה שהכוכבית ⊛ מופיעה.

ב. נסמן $\bar{X} = X \cup Acc(X)$. נראה שזו קבוצה סגורה. נניח ש- $x_n \to x$ סדרה מתכנסת, ו- $\{x_n\} \subseteq \bar{X}$. אם החל ממקום מסוים כל ה-x_n-ים הם ב-X, אז הגבול הוא ב-$Acc(X)$ ולכן ב-$\bar{X}$, אלא אם כן זו הסדרה הקבועה, ואז הגבול הוא ב-X ולכן ב-$\bar{X}$. כנ"ל, אם החל ממקום מסוים כל ה-x_n-ים ב-$Acc(X)$; אז זו סדרה מתכנסת בתוך הקבוצה הסגורה $Acc(X)$, ולכן הגבול הוא ב-$Acc(X)$, ולכן ב-$\bar{X}$. אחרת יש אינסוף איברים מ-X שאינם ב-$Acc(X)$ ואינסוף איברים מ-$Acc(X)$ שאינם ב-X, מה נעשה? נסתכל רק על

הז'בריים שב- $A_{cc}(X)$, למשל. זה ייתן לנו תת סדרה x_{n_k} של הסדרה המתכנסת x_n, לכן $x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} x$. $\{x_{n_k}\}\subseteq A_{cc}(X)$, אם $x\in A_{cc}(X)$, כי זו קבוצה סגורה.

בקיצור - בכל מקרה $x\in \bar{X}$, $\Leftarrow$ $\bar{X}$ סגורה.

- כעת F קבוצה סגורה המכילה את X, $X\subseteq F$, אז ברור שגם $A_{cc}(X)\subseteq F$. תהי $\{x_n\}\subseteq X\setminus\{x\}$ סדרה המתכנסת ל- x, כלומר $x\in A_{cc}(X)$. $x_n\in X\subseteq F$, כלומר $\{x_n\}\subseteq F$ היא סדרה מתכנסת החלקית לקבוצה סגורה. לכן הגבול גם ב- F.

בקיצור, $X\subseteq F$, $A_{cc}(X)\subseteq F$ $\Leftarrow$ $\bar{X}=X\cup A_{cc}(X)\subseteq F$. מש"ל.

(3) נגדיר $A=\mathbb{Q}^n\subseteq\mathbb{R}^n$. זו בפירוש קבוצה בת"מ. מדוע היא צפופה?

תהי $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ נקודה כלשהי. עבור $\varepsilon>0$ נתון, יהי $q=(q_1,\dots,q_n)\in\mathbb{Q}^n$ כך שלכל $1\le i\le n$; $0<|x_i-q_i|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$

לכן,
$$\|x-q\|^2=\sum_{i=1}^{n}|x_i-q_i|^2<\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2=n\cdot\frac{\varepsilon^2}{n}=\varepsilon^2$$

כלומר: $0<\|x-q\|<\varepsilon$. בפרט $x\neq q$.

מכאן, אם כך, נוכל לבנות סדרה $q_m\to x$, כך שלמשל: $0<\|q_m-x\|<\frac{1}{m}$, כלומר $\{q_m\}\subseteq A\setminus\{x\}$, ו- $q_m\xrightarrow{m\to\infty}x$.

מכאן נסיק $x\in A_{cc}(\mathbb{Q}^n)$. x היה כלשהו ולכן: $A_{cc}(\mathbb{Q}^n)=\mathbb{R}^n$; $\overline{\mathbb{Q}^n}=\mathbb{Q}^n\cup A_{cc}(\mathbb{Q}^n)=\mathbb{R}^n$. מש"ל.

(6) $A\subseteq\mathbb{R}^n$. הגדרנו את ∂A כך: $\partial A=\mathbb{R}^n\setminus A^\circ\setminus(A^c)^\circ$

נסמן $F_1=(A^\circ)^c$, $F_2=((A^c)^\circ)^c$. F_i הן משלימות של קבוצות פתוחות, ולכן הן סגורות, לכן: $\partial A=\mathbb{R}^n\cap F_1\cap F_2$

וכיוון שרואים ש- ∂A היא חיתוך של שלוש קבוצות סגורות, ולכן סגורה.

אגב:

$F_2=((A^c)^\circ)^c=\bar{A}$. הערה - למה זה עוזר? כי אז:

וזה מה שצריך להראות. $\longrightarrow$ $\partial A=(\mathbb{R}^n\setminus(A^c)^\circ)\setminus A^\circ=\bar{A}\setminus A^\circ$

<u>הוכחה</u> כדי להוכיח $((A^c)^\circ)^c=\bar{A}$, שקול להוכיח: $\bar{A}\cup(A^c)^\circ=\mathbb{R}^n$.

ניקח $x\in\mathbb{R}^n$, נניח שאיננו ב-$(A^c)^\circ$, ונותר רק להראות $x\in\bar{A}$.

אבל; אם $x\notin(A^c)^\circ$, זה אומר שאין שום כדור $B(x,r)$ המוכל ב-A^c.

לכן בכדור $B(x,\frac{1}{n})$ יש $x_n\in A$. (לכל n ניתן למצוא x_n כזה).

נשים לב, $|x_n-x|<\frac{1}{n}$. לכן הסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת וגבולה הוא x.

כלומר; x הוא נקודת גבול של A. לכן $x\in\bar{A}$. ▨

<u>הערה</u>

שימו לב שאנחנו מבדילים לעיתים בין $\bar{A}$ - אוסף כל נקודות הגבול של A, לבין $A_{cc}(A)$; אוסף כל נקודות הגבול של A, שאליהן ניתן להתקרב גם ע"י סדרות שלא מכילות את נקודת הגבול. למשל; ב-$\mathbb{R}$; $A=[0,1)\cup\{2\}$.

אז $A_{cc}(A)=[0,1]$, אבל $\bar{A}=[0,1]\cup\{2\}$.

ל-$\{2\}$ אפשר להגיע <u>רק</u> ע"י הסדרה הקבועה $x_n\equiv 2$.

7

<u>כיוון "⇐" הוא מיידי</u>; אם $A=\cup I_k$ כש-I_k הם קטעים פתוחים (לא חשוב אפילו שהם זרים), אז A הוא איחוד של פתוחות ולכן פתוחה.

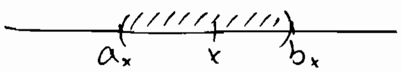
<u>כיוון "⇒" יותר קשה</u>:

נניח ש-A פתוחה. צ"ל שקיימים קטעים פתוחים (קטע יכול להיות קרן או $\mathbb{R}$) זרים, כך ש- $A=\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k$. (לצורך העניין, גם $\emptyset$ הוא קטע פתוח).

[הערה - שימו לב ~~שטענו~~ כאן שהאיחוד הוא בן מנייה. נוכיח גם את זה בסוף].

<u>הוכחה</u>:

לכל $x\in A$, נתבונן בקטע (a_x,b_x) המוגדר באופן הבא;



$$a_x=\sup\{y\in A^c : y<x\}$$
$$b_x=\inf\{y\in A^c : x<y\}.$$

שימו לב שכיוון <u>שיש</u> קטע סביב x המוכל ב-A (- כי היא פתוחה), $a_x<x<b_x$,

כלומר מתקבל ממש קטע. כמו כן, $(a_x,b_x)\subseteq A$. כי a_x הוא ה- sup,

לכן אין $a_x<y<x$ הנמצא ב-A^c, וכנ"ל בצד השני.

נניח שלכל $y\in A$ מתקיים $y\in(a_x,b_x)$, אז $(a_y,b_y)=(a_x,b_x)$;
כלומר הקטעים <u>זהים</u>, ואם $y\notin(a_x,b_x)$, אז בנ"ח, בה"כ; $b_x<y$,
שהרי אז נקבל $b_x\le a_y$, כלומר $(a_x,b_x)\cap(a_y,b_y)=\emptyset$, כלומר
הקטעים <u>זרים</u>.

זה אומר שאפשר לקחת נציג מכל קטע ולכתוב $A=\bigcup_{x\in X}(a_x,b_x)$, כש- $X\in A$
היא קבוצת "הנציגים". אבל, פורמלית רק צריך לעשות זאת; להגדיר יחס
על A; $x\sim y$ אם $a_x=a_y$, $b_x=b_y$. לבדוק שזה יחס שקילות,
ואז X היא קבוצת נציגים, של קבוצת מחלקות השקילות. זה כנראה יותר
ברור אינטואיטיבית בלי ההסבר הפורמלי...

- <u>שאלה:</u> מדוע X היא בת-מנ"ה? כלומר, מדוע לא צריך מספר
יותר גדול ~~מ~~ $\aleph_0$ של קטעים?

<u>תשובה:</u> בכל קטע כזה יש רציונלי. אם היו יותר מ- $\aleph_0$ קטעים שונים,
היינו מקבלים יותר מ- $\aleph_0$ רציונלים שונים, בסתירה לכך שיש רק $\aleph_0$ כאלו.

- <u>הערה 1:</u>
אגב כתבתי ורק זה קודם; הסימון $A\cup B$ מציין שהאיחוד הוא איחוד <u>זר</u>.

- <u>הערה 2:</u>
לקחנו סופרמום ואינפימום של קבוצות חסומות מלמעלה ומלמטה, בהתאמה, אבל
לא ברור שהן אינן ריקות! כבכלל, ואנחנו משתמשים בהסכם ש- $\sup\emptyset=-\infty$,
$\inf\emptyset=\infty$. באופן הזה מקבלים קרנ"ים, אם צריך, או את $\mathbb{R}$, אם
זה המצב.

(8) יהיו K_i קומפקטיות ולא ריקות - סדרה <u>יורדת</u> של קבוצות; $\dots\subseteq K_{n+1}\subseteq K_n\subseteq\dots\subseteq K_1$
צריך להוכיח ש- $K=\bigcap_{i=1}^{\infty}K_i$ היא לא ריקה.

[<u>הערה</u> ברור שחיתוך של קומפקטיות היא קומפקטית; חיתוך של סגורות זה
סגור, וחיתוך של חסומות מוכל באחת מהן - לכן חסום.]

<u>הוכחה</u>

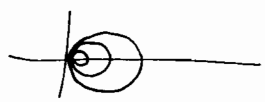
נבחר, לכל n, $x_n\in K_n$. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq K_1$, כלומר הסדרה חסומה.
ניקח תת-סדרה מתכנסת, $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. שימו לב לעובדה הבאה;

אם $m\ge n$, אז $x_m\in K_m\subseteq K_n$, לכן $x_m\in K_n$. כלומר $K_n\supseteq\{x_m\}_{m=n}^{\infty}$.
במילים אחרות; החל ממקום מסוים, כל איברי הסדרה נמצאים ב-K_n.
לכן כל איברי תת-הסדרה המתכנסת, $x_{m_k}\xrightarrow{k\to\infty}x$, נמצאים החל ממקום מסוים ב-K_n, ל-n נתון. כיוון ש-K_n סגורה, נובע שהגבול נמצא בה; $\boxed{x\in K_n}$. לקחנו n כלשהו, לכן x נמצא בכל ה-K_n-ים, ולכן $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}K_n=K$, ובפרט $\boxed{K\neq\emptyset}$. ▨

(*) **הערה**- חובה להניח שהקבוצות גם סגורות וגם חסומות. ניתן למצוא דוגמאות נגדיות כבר ב-$\mathbb{R}$, וההכללה ל-$\mathbb{R}^m$ קלה;

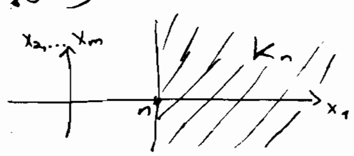
(1) $K_n=(0,\frac{1}{n})$ הן קבוצות חסומות אך לא סגורות. אכן; $K=\bigcap_{n=1}^{\infty}(0,\frac{1}{n})=\emptyset$.

ההכללה תהיה $K_n=B(a_n,\frac{1}{n})$, כאשר $a_n=(\frac{1}{n},0,\dots,0)$, שזו סדרה יורדת של קבוצות חסומות אך לא סגורות;



(2) $K_n=[n,\infty)$ הן קבוצות סגורות אך לא חסומות. אכן $K=\bigcap_{n=1}^{\infty}[n,\infty)=\emptyset$

ההכללה היא $K_n=\left\{x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix}:\ n\le x_1\right\}$. זו סדרה יורדת של קבוצות סגורות ולא חסומות;



- לכן אי-אפשר לוותר על אף אחד מהתנאים.

(9) האם לפונקציות הבאות $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ יש גבולות חוזרים ($\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}f(x,y)$, ולהפך; קודם x ואז y), וגבול כפול; $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$?

נשים לב, לפני שנתחיל, שבסעיפים (1)-(3), יש כדור סביב הראשית שבו מלבד $\binom{0}{0}$, כל הנקודות הן נק' רציפות של f. לכן הגבולות החוזרים הם פשוט הצבה בגבולים;

רציפות ב- $(x,0)$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 0}\left(f(x,0)\right) = \lim_{x\to 0} f(x,0)$$

ובאופן דומה;

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(0,y)$$

<u>נתחיל:</u>

(א)

$\circledast$ $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = 0$, $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0$

אבל, אם $\binom{x}{x}$ נקבל:

$\circledast$ $\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \neq 0$

לכן <u>אין</u> גבול בראשית.

(ב)

$\circledast$ $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} \longrightarrow$ <u>אין גבול</u>. יכול להתקרב להיות $+\infty$ או $-\infty$!

$\circledast$ $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\frac{1}{y} \longrightarrow$ כנ"ל; אין גבול.

ברור שאין גבול $\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} f\binom{x}{y}$, כי אפילו על הישר $(x,0)$ אין גבול!

(ג)

$\circledast$ $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{|x|} \longrightarrow$ אין גבול, כי:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{|x|} = +1, \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(1+x)}{|x|} = -1$$

$\circledast$ $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{\ln(e^y)}{|y|} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{|y|} = \begin{cases} \xrightarrow{y\to 0^+} 1 \\ \xrightarrow{y\to 0^-} -1 \end{cases}$

לכן שוב אין גבול חוזר, ובוודאי אין גבול בראשית!

(ד) כאן הפונקציה לא מוגדרת על הצירים, אבל גם אין גבול $\lim_{y\to 0} f(x,y)$
לשום $x\neq 0$, אז אי-אפשר לדבר על גבול חוזר.
(כבר הגבול הראשון בעייתי).
לכן אין גבולות חוזרים. מה עם גבול ב-$\binom{0}{0}$? נשים לב
שכאן אי-אפשר לסתור קיום גבול מייד - רק בגלל שאין גבולות חוזרים;

כי ראינו זה לא שהתקדמנו מכיוון הצירים והייתה התבדרות (עצמה)
עד קודם. לכן נראה ישירות. נוכיח שהגבול קיים ושווה לאפס;

$$0 \le \left| (x^2+y^2)\cdot\sin\tfrac{1}{x}\cdot\sin\tfrac{1}{y} - 0 \right| \le |x^2+y^2| \xrightarrow{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} 0$$

מסנדוויץ׳; $f(x,y) \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$ $\blacksquare$.

שימו לב שראינו בשאלה הזאת דוגמאות לכך ש:

- שני הגבולות החוזרים קיימים, שווים, אך אין גבול בראשית (א),
- שני הגבולות החוזרים לא קיימים, ואין גבול (ב, ג),
- שני הגבולות החוזרים לא קיימים, ויש גבול (ד).