חדו"א 1 - תרגיל מס' 4

1. תהי $\{a_n\}$ סדרה. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם קיים מספר ממשי A ומספר טבעי M כל שלכל $n > M$ טבעי ולכל $\varepsilon > 0$ מתקיים $|a_n - A| < \varepsilon$ אזי לסדרה יש גבול.

(ב) אם הסדרה מתכנסת אז לכל x ממשי, קיים $\varepsilon > 0$ וגם N טבעי כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $|a_n - x| < \varepsilon$.

(ג) אם לכל x ממשי, קיים $\varepsilon > 0$ וגם N טבעי כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $|a_n - x| < \varepsilon$, אזי הסדרה מתכנסת.

2. הוכיחו לפי הגדרת הגבול:

(א) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4} = \frac{1}{3}$

(ב) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+\cos(n)} - n = 0$

(ג) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n!)}{n^{1/3}} = 0$

(ד) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \neq 2$

(ה) $\lim_{n\to\infty} c^{\frac{1}{n}} = 1$ כאשר $c > 0$

3. הוכיחו לפי הגדרת הגבול כי הסדרות הבאות אינן מתכנסות:

(א) $a_n = (1 + cos(\pi n)) \cdot \frac{n}{n+1}$

(ב) $a_{3k} = 0, a_{3k+1} = 1, a_{3k+2} = 2$ עבור $k \geq 1$

(ג) $a_n = \frac{3}{n} + (-1)^n$

4. (א) תהי $\{a_n\}$ סדרה עבורה קיים $0 \leq \alpha < 1$ כל ש $|a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \alpha$ לכל n.
הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(ב) תהי $\{a_n\}$ סדרה המקיימת $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = l < 1$.
הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. השתמשו בסעיף א.

(ג) תהי $\{a_n\}$ סדרה המקיימת $|a_n|^{\frac{1}{n}} < 1$ לכל .
האם בהכרח מתקיים $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$?
הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמא ניגדית.

(ד) יהיו $|h| < 1$, $\alpha > 0$. נסמן $a_n = n^\alpha h^n$.
הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. השתמשו בסעיף ב.

5. חשבו את $\lim_{n\to\infty} a_n$ כאשר

(א) $a_n = \frac{123456789 \cdot n}{n^2-2}$

(ב) $a_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+n-1}$

(ג) $a_n = (n^3+n^2)^{\frac{1}{3}} - (n^3+1)^{\frac{1}{3}}$

(ד) $a_n = \frac{n^{\frac{2}{3}} \sin(n!)}{n+1}$

(ה) $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2}$

(ו) $a_n = \frac{(\sqrt{n+1}-1)(\sqrt{n^3-n}+n)}{\sqrt{n^4+n}-\sqrt{n^3}}$

(ז) $a_n = \frac{2^n+3^3}{3\cdot 2^{n+1}+2\cdot 3^{n-1}}$

6. (א) נניח כי $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = a$. הוכיחו כי הסדרה

$$\{x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n, \ldots\}$$

מתכנסת וגבולה שווה ל־ a.

(ב) הוכיחו כי לסדרה מתכנסת קיים איבר מכסימלי או איבר מינימלי או שניהם. תנו דוגמא לכל אחד מהמקרים.

7. (א) נתון כי הסדרה $\{a_n\}$ מקיימת $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = a$.
האם בהכרח קיים $\lim_{n\to\infty} a_n$?

(ב) נתון כי $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.
האם בהכרח לפחות אחת מהסדרות $\{a_n\}, \{b_n\}$ מתכנסת לאפס ?

(ג) נתון כי $\lim_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$.
הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. מה ייתכן במקרה ו־ $a = 0$? תנו דוגמאות.

(ד) נתון כי $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. חשבו את הגבול של $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n}$.