הבהרות ותיקונים לפתרונות תרגילי בית

נסמן ב- A/B את ההפניה לתרגיל בית מס' A, שאלה מס' B.

4/4 (ג): האינטגרל $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\,dx$ מתכנס, ולא מתבדר.

ההשוואה ל- $\frac{1}{x}$ ליד 0, למשל, לא תיתן דבר כי:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{1-x^2}\cdot x = 0 \Rightarrow \frac{\ln x}{1-x^2} \le c\cdot \frac{1}{x}$$

קיים c כך ש: (ל-x גדול מספיק)

אבל $\int_0 \frac{1}{x}$ מתבדר, לכן אין בכך אינפורמציה.
אותה טעות נעשתה ליד 1.

פתרון: נשווה ל- $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ליד 0:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{1-x^2}\cdot \sqrt{x} = 0 \Rightarrow \frac{\ln x}{1-x^2} \le c\cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

קיים c כך ש- ל-x גדול דיו.

$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ מתכנס, לכן גם $\int_0^{1/2} \frac{\ln x}{1-x^2}\,dx$.

ליד 1, נראה שבעצם אין בעיה וקיים גבול סופי:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x^2} \underset{\downarrow}{=} \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1}\cdot \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x} \underset{\downarrow}{=} \frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{1/x}{-1} = -\frac{1}{2}$$

במידה והגבולות קיימים (מיד נראה שכן)   לופיטל

ולכן האינטגרל $\int_{1/2}^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\,dx$ הוא אינטגרל רימן (בעצם השוונו לפונק' האינטגרבילית הקבועה 1).

$\Leftarrow \int_0^1 = \int_0^{1/2} + \int_{1/2}^1$ מתכנס.

2/3b: השבר $\frac{x^5-3x^3+x}{x^3+2x+1}$ הוא מנה שקשה לפרק;

במקום זה צריך להיות x^3-2x+1 (למשל). רואים ש- $x=1$ הוא שורש, ומחלקים ב- $(x-1)$...

5/10(א): האם הפונקציות $f_n(x)=\sqrt[n]{1+x^n}$ מתכנסות במ"ש ב- $[0,\infty)$?

נפרט את הפתרון (ה"ה שימוש לא טריוויאלי בלגרנז').

עבור $x\in[0,1]$, נשתמש בלגרנז' עם $g(y)=(1+y)^{1/n}$ בקטע $[0,x^n]$:

$$g(x^n)-g(0)=\sqrt[n]{1+x^n}-1=\underbrace{\frac{1}{n}(1+x_1)^{\frac{1}{n}-1}}_{g'(x_1)}\cdot(x^n-0)\le\frac{1}{n}, \qquad x_1\in[0,x^n]$$

וההמשך כפי שכתוב:

$$\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-\underset{1}{\underset{\shortparallel}{f(x)}}|\le\frac{1}{n}.$$

עבור $x\in[1,\infty)$, נשתמש בלגרנז' עם $g(y)=(c+y)^{1/n}$ כאשר $c=x^n$ קבוע, בקטע של $[0,1]$:

$$g(1)-g(0)=(x^n+1)^{1/n}-x=\underbrace{\frac{1}{n}(x^n+x_1)^{\frac{1}{n}-1}}_{g'(x_1)}\cdot(1-0), \qquad x_1\in[0,1]$$

ולכן, כפי שכתוב:

$$\sup_{x\in[1,\infty)}|f_n(x)-\underset{x}{\underset{\shortparallel}{f(x)}}|\le\frac{1}{n}.$$

מכאן מקבלים את ההתכנסות במ"ש הרצויה.

5/6(ב): האם מותר לגזור איבר-איבר את $\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\arctan\frac{x}{n^2}}_{f_n(x)}$?

- מותר, אבל יש לתקן את הנימוק:

אכן, $|f_n'(x)|\le\frac{1}{n^2}$ לכל $x\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$ (חישוב כמו שם...)

ולכן $\sum f_n'(x)$ מתכנס במ"ש ב- $\mathbb{R}$ לפי ויירשטרס.

אבל המשפט על אינטגרציה/גזירה איבר-איבר תקף רק בתחום סגור, כלומר נסיק ש- $\sum f_n(x)=\sum\int_0^x f_n'(t)\,dt$ מתכנס במ"ש בקטע $[-M,M]$, לכל $M\in\mathbb{R}$. אז, לכל x נמצא M כך ש- $x\in[-M,M]$ ובקטע זה נוכל לגזור איבר-איבר ולקבל $\left(\sum f_n(x)\right)'=\sum f_n'(x)$.

<u>שים לב:</u> הדיוק הוא בכך ש- $\sum f_n(x)$ עצמו <u>אינו</u> מתכנס במ"ש ב- $\mathbb{R}$ (אלא רק בכל קטע סגור...).

[אכן, לכל n נוכל למצוא $x_n = n^2$ כך ש-

$$\left|f(x_n) - \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x_n)\right| = \sum_{k=n}^{\infty} \arctan\frac{x_n}{k^2} = \underbrace{\arctan\frac{n^2}{n^2}}_{\frac{\pi}{4}} + \underbrace{\dots}_{>0} > \frac{\pi}{4}$$

ולכן הטור לא מתכנס במ"ש ב- $\mathbb{R}$.]

<u>7/1ג:</u> הפתרון אינו נכון, הטור <u>אינו</u> מתכנס במ"ש ב- $(0,\infty)$.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\min\left(xn!, \frac{1}{xn!}\right)}_{f_n(x)}$$

הטעות היא שלכל x חסמנו את הטור $\sum f_n(x)$ ע"י טור מספרים מתכנס, אבל לא חסמנו <u>אבר-אבר</u> כמו שוויירשטרס דורש; (ז"א לא היה $|f_n(x)| \le b_n$ כאשר $\sum b_n$ טור מספרים מתכנס).

<u>פתרון:</u> נתבונן בסדרה: $x_k = \frac{1}{k!}$. אזי $f_k(x_k) = 1$, ולכן

$$\left|f(x_k) - f_{k-1}(x_k)\right| = \left|\sum_{n=k}^{\infty} \underbrace{f_n(x_k)}_{\ge 0}\right| \ge f_k(x_k) = 1$$

מכאן שאין התכנסות במ"ש! (מצאנו סדרה "רעה" של נקודות)