טופולוגיה - תרגיל מס' 1:

1. נגדיר לכל זוג מרחבים מטריים (X_1,d_1), (X_2,d_2) מרחק גרומוב-האוסדורף

$$d_{GH}(X_1,X_2)=\inf\left\{r>0 \;\middle|\; \begin{array}{r}\text{קיים מרחב מטרי } Z\\ \text{ושיכונים } X_1\hookrightarrow Z,\ X_2\hookrightarrow Z\\ \text{כך ש- } d_H(X_1',X_2')<r\\ \text{כאשר } X_i' \text{ זו התמונה של } X_i\\ \text{תחת השיכון ו- } d_H \text{ הוא מרחק}\\ \text{האוסדורף}\end{array}\right\}$$

(שיכון $f: X\to Z$ זו פונק' כך ש-$d_Z(f(x_1),f(x_2))=d_X(x_1,x_2)$ לכל $x_1,x_2\in X$)

הוכיחו כי d_{GH} מגדיר מטריקה על אוסף המרחבים המטריים.

2(**). נתונה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ חלקה כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ יש $n\in\mathbb{N}$ עבורו $f^{(n)}(x)=0$. הוכיחו כי f הוא פולינום.
(רמז: השתמשו בבייר פעמיים)

3. נסמן:
$C[0,1]=\{f:[0,1]\to\mathbb{R} \mid f\text{ - רציפה}\}$
$C[0,1]\supseteq A=\{f:[0,1]\to\mathbb{R} \mid f$ רציפה, ו-f מונוטונית בתת-קטע מאורך חיובי$\}$

הוכיחו כי A מקטגוריה ראשונה.
הסיקו שיש פונק' רציפות שלא מונוטוניות באף תת-קטע מאורך חיובי.

4. כמה טופולוגיות יש על קבוצה עם 4 איברים?

5. הוכיחו כי אם $\Sigma\subset P(X)$ בסיס לטופולוגיה על X ו-$Y\subseteq X$ אז $\{B\cap Y \mid B\in\Sigma\}$ בסיס לטופולוגיה המושרית על Y.

6. מצאו שתי טופולוגיות על $\mathbb{R}$ שאינן ברות השוואה, ושתיהן עדינות יותר מהטופולוגיה הרגילה על $\mathbb{R}$.

7. בסעיפים הבאים, קבע האם המרחב X יחד עם $\Omega \subseteq 2^X$ הוא מרחב טופולוגי. הוכח את תשובתך:

(א) X - קב' אינסופית, $\Omega = \{U \subseteq X \mid U^c \text{ סופית}\}$

(ב) $X = \mathbb{R}^2$, $\Omega = \{B(0,r) \mid r \geq 0\} \cup \{\phi\} \cup \{X\}$

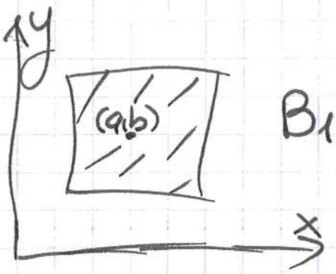
(ג) $X = \mathbb{R}^2$, $\Omega = \{\overline{B}(0,r) \mid r \geq 0\} \cup \{\phi\} \cup \{X\}$

8. (א) הוכח שהקבוצה $\Sigma = \{[a,b) \mid a<b,\ a,b \in \mathbb{R}\}$ מהווה בסיס לטופולוגיה על $\mathbb{R}$.

(ב) הראה שכל קבוצה מ- Σ היא פתוחה וסגורה.

(ג) הראה שטופולוגיה זאת עדינה יותר מהטופולוגיה הרגילה על $\mathbb{R}$ וגסה יותר מהטופולוגיה הדיסקרטית.

9. הוכח כי הטופולוגיות הנוצרות מהבסיסים הבאים ב- $\mathbb{R}^2$ שקולות:



$$B_1 = \left\{ \{(x,y) \mid \max\{|x-a|, |y-b|\} < r\} \;\middle|\; \begin{matrix} (a,b) \in \mathbb{R}^2 \\ r \geq 0 \end{matrix} \right\}$$

$$B_2 = \left\{ \{(x,y) \mid |x-a| + |y-b| < r\} \;\middle|\; \begin{matrix} (a,b) \in \mathbb{R}^2 \\ r \geq 0 \end{matrix} \right\}$$