

חדו"א 2 - תרגיל מס' 11

1. האם קיים הגבול הכפול $\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{x^2 y - y^2 x}{x^2 + y^2}$?
2. תהינה $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות. תארו את קבוצת נקודות הרציפות של הפונקציה $\varphi(x, y) = f(x) + g(y)$, במונחי התחומים שבהן f ו- g רציפות.
3. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות. האם הן חסומות? רציפות? נסו לצייר את הגרפים, או לפחות את תחום ההגדרה:
- (א) $f(x, y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$
- (ב) $f(x, y) = (x^3 + y^3)/(x^2 + y^2)$ (איך כדאי להגדיר את הפונקציה באפס?)
- (ג) $f(x, y) = \arcsin(y/x)$
- (ד) $f(x, y) = \frac{y-x^2}{x(x-1)}$
- (ה) $f(x, y) = \ln(-x-y)$
- (ו) $f(x, y) = \text{sign}(\sin(x) \sin(y))$
4. הוכיחו בפירוט את הטענה הבאה: אם $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ רציפה ב- x_0 ו- $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ רציפה ב- $f(x_0)$, אז $g \circ f$ רציפה ב- x_0 .
5. תהי $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה. נסמן $f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R}^2; f(x) \in A\}$. הוכיחו ש- f רציפה אם ורק אם לכל $A \subseteq \mathbb{R}$ פתוחה, גם $f^{-1}(A) \subseteq \mathbb{R}^2$ פתוחה.
6. נתונה סדרת פונקציות רציפות $f_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. הראו שהקבוצה $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \inf_n f_n(x, y) < 0\}$ פתוחה.
7. נתון ש- $A, B \subset \mathbb{R}^2$ קשירות מסילתית. האם גם $A \cap B$ קשירה? האם $A \cup B$ קשירה? ומה קורה אם ידוע ש- $A \cap B = \emptyset$?
8. תהינה $A, K \subset \mathbb{R}^n$ קבוצות זרות, K קומפקטית, A סגורה. הראו ש- $\inf_{x \in K, y \in A} \|x - y\| > 0$.
9. (א) הוכיחו כי לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \cos^{2k}(\pi n! x) = D(x)$ כאשר $D(x)$ היא פונקציית דיריכלה (אחד על הרציונלים, אפס על האי-רציונלים).
 (ב) הראו ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \cos^{2k}(\pi n! e) \neq \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^{2k}(\pi n! e)$.
 (רמז: הזכרו בהוכחה ש- e לא רציונלי, והראו ש- $(n!e - [n!e]) \leq 2/n$.)
10. האם הפונקציות הבאות רציפות במידה שווה בתחום הנתון?
- (א) $f(x, y) = \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)$ בתחום $B_{(0,0)}(1) = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$
- (ב) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ בתחום \mathbb{R}^2
- (ג) $f(x, y) = \sqrt{xy}$ בתחום $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$
- (ד) $f(x) = 1/(1 - \|x\|)$ ב- $B_{(0,0)}(1) \subset \mathbb{R}^d$ (כדור פתוח). מהי תמונת הפונקציה?