# חדו"א 2 – תרגיל מס' 12

1. מצאו את הנגזרות החלקיות ביחס לכל המשתנים:
   (א) $f(x,y) = x\sin(y)/(x^2+y^2)$ כש־ $(x,y) \neq (0,0)$ ו־ $f(0,0)=0$.
   (ב) $f(x,y) = \exp(\arctan(y/x))$
   (ג) $f(x,y,z) = x/\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$

2. נתון ש־ $f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ גזירות ב־ $x \in \mathbb{R}^d$. הראו שקיימים $C,\delta > 0$ כך שלכל $h \in \mathbb{R}^d$ עם $\|h\| < \delta$ מתקיים $\|f(x+h)-f(x)\| \leq C\|h\|$.

3. תהיינה $f_1,\dots,f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות דיפרנציאביליות. נגדיר $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ע"י $f(x_1,\dots,x_n) = \sum_j f_j(x_j)$. הוכיחו ש־ $f$ פונקציה דיפרנציאבילית ושמתקיים

$$D_x f(h_1,\dots,h_n) = \sum_{j=1}^n f_j'(x_j)h_j.$$

4. (א) תהי $f(x) = \|x\|$ עבור $x\in\mathbb{R}^n$. באילו נקודות $f$ דיפרנציאבילית? מצאו את הדיפרנציאל של $f$ בנקודות הנ"ל.
   (ב) אותו דבר, עבור $f(x) = \|x-x_0\|^2/2$, כאשר $x_0\in\mathbb{R}^n$ נקודה קבועה כלשהי.

5. האם הפונקציות הבאות דיפרנציאביליות ב־ $(0,0)$? וברביע $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x,y>0\}$?
   (א) $f(x,y) = (x^3+y^3)^{1/3}$
   (ב) $$f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}\,, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & x=y=0 \end{cases}$$
   (ג) $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & x=y=0 \end{cases}$$

6. (א) תהי $f(x,y) = x^2y - y^2x$, כאשר $x(\rho,\theta) = \rho\cos\theta, y(\rho,\theta) = \rho\sin\theta$. השתמשו בכלל השרשרת וחשבו את $\partial f/\partial\theta$ ו־ $\partial f/\partial\rho$. (כלומר, הנגזרות החלקיות של הפונקציה $(\rho,\theta)\mapsto f(x(\rho,\theta),y(\rho,\theta))$)
   (ב) נניח ש־ $u(x,y) = \sin x + f(\sin y - \sin x)$ כאשר $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה. הראו ש־ $u_x\cos y + u_y\cos x = \cos x\cos y$.

7. יהיו $f,g:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ פונקציות, דיפרנציאביליות בנקודה $x\in\mathbb{R}^n$. השתמשו במשפט על דיפרנציאביליות הפונקציה המורכבת והוכיחו:
   (א) גם $f\pm g$ ו־ $fg$ דיפרנציאביליות ב־ $x$.
   (ב) במידה ו־ $g(x)>0$, גם $f/g$ ו־ $g^f$ דיפרנציאבליות ב־ $x$.
   (ג) נניח $f,g:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^k$ פונקציות דיפרנציאביליות ב־ $x\in\mathbb{R}^d$. נגדיר $\varphi:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ על ידי $\varphi(x) = \langle f(x),g(x)\rangle$. הראו ש־

$$D_x\varphi(h) = \langle D_xf(h),g(x)\rangle + \langle f(x),D_xg(h)\rangle.$$

8. נניח ש־ $f(x,y) = x^3y/(x^{10}+y^2)$ עבור $(x,y) \neq (0,0)$ ובנוסף $f(0,0) = 0$. האם $f$ רציפה בראשית? האם $f$ חסומה בראשית? האם קיימות כל הנגזרות הכיווניות בראשית?

9. פונקציה $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ נקראת "הומוגנית ממעלה $\lambda$" כאשר $f(ax) = a^\lambda f(x)$ לכל $a \geq 0$. נניח ש־ $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ דיפרנציאבלית בכל $\mathbb{R}^n$ והומוגנית ממעלה $\lambda$.

   (א) הראו ש־ $\lambda \geq 1$.

   (ב) הוכיחו ש־ $\lambda f(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\, x_j$. (זו נקראת זהות אוילר. רמז: לגזור ביחס ל־ $a$ את שני האגפים של $f(ax) = a^\lambda f(x)$).