חדו"א 2 – תרגיל מס' 13

1. (א) נניח ש־ $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות. נסמן $f(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$. ציירו את קווי הגובה של f. באיזה כיוון מצביע הגרדיאנט של f בנקודה (x, y)? הדגימו את תשובתכם בציור.

   (ב) כנ"ל, עבור $f(x, y) = \varphi(x/y)$.

2. הוכיחו שפונקציה מהצורה $u(x, y) = f(x)g(y)$, עבור f ו־ g גזירות פעמיים ברציפות, מקיימת את המשוואה הדיפרנציאלית החלקית $uu_{xy} - u_x u_y = 0$.

3. מצאו את כל הפונקציות $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ בעלות נגזרות רציפות מסדר שני המקיימות $\partial^{xy} u \equiv 0$.

4. נסמן $g(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$. תהי

$$f(x, y) = \begin{cases} xyg(x, y) & (x, y) = (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

   (א) מצאו את הנגזרות החלקיות של f ביחס לשני המשתנים.

   (ב) השתמשו בכך שהגבולות החוזרים של g שונים זה מזה, והראו שמתקיים $\partial^{xy} f(0, 0) = -1$ ו־ $\partial^{yx} f(0, 0) = 1$.

   (ג) איך ייתכן כדבר הזה, לאור המשפט שאומר ש־ $\partial^{xy} f = \partial^{yx} f$?

5. חשבו את פולינומי טיילור מסדר 2 של הפונקציות הבאות:

   (א) $f(x, y) = x^y$ בנקודה $(1, 1)$.

   (ב) $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^2$ בנקודה $(0, 0, 0)$.

6. תהי $f \to \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ פונקציה הגזירה ברציפות שבע פעמים. נסמן $\phi(t) = f(t, t^2, t^3)$. מצאו את פולינום טיילור מסדר 3 של ϕ ב־ $t = 0$.

7. מיינו את הנקודות הסטציונריות של הפונקציות הבאות:

   (א)
$$f(x, y) = \begin{cases} xy\ln(x^2 + y^2)\,, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0\,, & x = y = 0 \end{cases}$$

   (ב) $f(x, y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$

   (ג) $f(x, y, z) = \sin(z) + \sin(xy)$

8. תהי $f(x, y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$. הראו של־ f רק נקודה סטציונרית אחת, שהיא מקסימום מקומי. האם ל־ f נקודת מקסימום גלובלי?

9. תהי $f(x, y) = (y - ax^2)(y - bx^2)$ עבור $a, b > 0, a \neq b$. הראו ש־ $(0, 0)$ אינה נקודת מינימום מקומי של f, למרות שהיא נקודת מינימום מקומי של f לאורך כל קו ישר דרך הראשית.

10. לפי תקנות הדואר בישראל, אפשר לשלוח חבילה בצורת תיבה בעלת מקצועות (צלעות) באורך x, y, z כאשר $x \leq y \leq z$ רק אם $2(x + y) + z \leq 100$. מהו נפח החבילה המקסימלי שניתן לשלוח?

11. תהיינה $\{(x_i,y_i)\}_{i=1\ldots,n}$ נקודות שונות במישור. מצאו קו ישר $y=f(x)$ כך שהביטוי $\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)-y_i\right]^2$ יהיה מינימלי.

12. ★ נניח ש־ $f(x,y)=g(x)h(y)$, עבור פונקציות חלקות g ו־ h, מקיימת את משוואת לפלס: $f_{xx}+f_{yy}=0$. הראו שקיים קבוע α כך ש־

$$g''(x)=\alpha g(x), \quad h''(y)=-\alpha h(y).$$

מצאו פתרונות מהצורה $f(x,y)=g(x)h(y)$ למשוואת לפלס. האם תוכלו למצוא את כל הפתרונות (אפילו בלי נימוק ריגורוזי)?