מבוא לאנליזה פונקציונלית – תרגיל 1

יש לפתור לפחות 6 מהשאלות שבדף התרגיל.

נא להגיש את הפתרון בפורמט pdf עד ה- 15 למרץ בשעה 23:00 בקישור הבא:
https://www.dropbox.com/request/nRg0EN6L6LXoDPsamHRd

1. הוכיחו כי אין סדרה של מספרים ממשיים $(a_n)_{n=1,2,\dots}$ כך שלכל סדרה $(b_n)_{n=1,2,\dots}$ של ממשיים מתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty \qquad \iff \qquad \sup_n |a_n b_n| < \infty$$

2. הוכיחו כי קבוצה קמורה ופתוחה במרחב בנך – קמורה מושלמת.

3. נסמן $X = C([0,1])$. יהי $Y \subseteq X$ אוסף הפונקציות הגזירות פעמיים ברציפות ב- $[0,1]$ ומתאפסות בקצות הקטע. נסמן $Ax = x''$ עבור $x \in Y$.

   (א) האם Y ת"מ סגור? הוכיחו כי האופרטור A עם $Dom(A) = Y$ הוא אופרטור לינארי חח"ע, סגור אך לא רציף, ותמונתו המרחב X כולו.

   (ב) הוכיחו כי האופרטור $B = A^{-1}$ הוא אופרטור אינטגרלי מהצורה

$$Bx(t) = \int_0^1 K(t,s)x(s)ds$$

   עם גרעין

$$K(t,s) = \begin{cases} (t-1)s & 0 \le s \le t \\ t(s-1) & t \le s \le 1 \end{cases}$$

   הוכיחו ש- B רציף.

4. המומנט מסדר n של פונקציה $f \in C[0,1]$ מוגדר על ידי:

$$m_n(f) := \int_0^1 f(x)x^n dx \qquad n = 0,1,2,\dots$$

   (א) הראו כי אם $m_n(f) = 0$ לכל n אז $f = 0$.

   (ב) הראו כי לכל $f \in C[0,1]$,

$$m_n(f) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

(ג) הסיקו כי ההעתקה $T : C[0,1] \to c_0$ המוגדרת על ידי

$$Tf = (m_0(f), m_1(f), m_2(f), \dots)$$

היא לינארית, חח"ע וחסומה. חשבו את הנורמה שלה.

(ד) הוכיחו כי T אינה על c_0.

5. (א) תהי $T : X \to Y$ העתקה לינארית בין מרחבים נורמים, המעתיקה את כדור היחידה הפתוח של X על כדור היחידה הפתוח של Y. הראו כי Y איזומטרי ל- $X/\text{Ker}T$.

(ב) יהי X מרחב בנך ויהי $B \subseteq X$ כדור פתוח סביב הראשית. תהי A קבוצה צפופה ב- B. הראו כי כל $x \in B$ ניתן להצגה כ:

$$X = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j x_j$$

עבור $x_j \in A$ וסקלרים λ_i המקיימים:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| < 1.$$

(ג) השתמשו בסעיפים הקודמים כדי להראות כי כל מרחב בנך ספרבילי איזומטרי למרחב מנה של ℓ_1.

6. הוכיחו כי $L^p([0,1])$ מכיל תת מרחב איזומטרי ל- ℓ_p. למה תת המרחב בהכרח סגור? (רמז: פונקציות עם אינסוף מדרגות)

7. יהי X מרחב לינארי. קבוצה בלתי תלויה לינארית S שפורשת את X (כלומר, לכל $x \in X$ קיימים $s_1, \dots, s_n \in S$ וסקלרים $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ כך ש- $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i s_i$) נקראת בסיס האמל (Hamel).

הוכיחו כי למרחב בנך אינסוף-ממדי אין בסיס האמל בן מנייה (רמז: משפט בייר).