

חזו"א 2 - תרגיל מס' 1

1. (תזכורת מחזורי "א 1) הוכיחו או הפריכו:

(א) הפונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה ב- \mathbb{R} אם לכל $x \in \mathbb{R}$ קיימת $\delta > 0$ כך שלכל $\varepsilon > 0$ מתקיים

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

(ב) אם הפונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה ב- \mathbb{R} , אזי לכל $x \in \mathbb{R}$ ו- $\delta > 0$ קיים $\varepsilon > 0$ כך ש-

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

2. מהו אוסף הפונקציות הקדומות של הפונקציה f על הקבוצה A במקרים הבאים:

$$A = \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \sin x & x < \pi/4 \\ \cos x & x \geq \pi/4 \end{cases} \quad (\text{א})$$

$$f(x) = x^2, \quad A = (0, 1) \cup (2, 3) \quad (\text{ב})$$

3. חשבו את האינטגרלים הבאים:

<p>a. $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$</p> <p>c. $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x} dx, \quad x \geq 0$</p> <p>e. $\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^5} dx, \quad x \geq 0$</p> <p>g. $\int \sqrt{1 - \cos^2(x)} dx, \quad 0 \leq x \leq \pi$</p> <p>i. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx, \quad a > 0$</p>	<p>b. $\int (1-x)(1-2x)(1-3x) dx$</p> <p>d. $\int (3x-7)^{12} dx$</p> <p>f. $\int \frac{x^2+5}{x^2+1} dx$</p> <p>h. $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx$</p> <p>j. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2(1+\cos x)}} dx$ (רמז: זווית כפולה)</p>
--	--

4. השתמשו באינטגרציה בחלקים כדי לחשב את האינטגרלים הבאים:

<p>a. $\int x e^{-2x} dx$</p> <p>d. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$</p> <p>g. $\int e^{2x} \sin 3x dx$</p>	<p>b. $\int \sin(\ln x) dx$</p> <p>e. $\int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx$</p> <p>h. $\int x^n \ln x dx$</p>	<p>c. $\int x \ln^2 x dx$</p> <p>f. $\int \sqrt{1-x^2} dx,$</p>
---	--	---

5. השתמשו באינטגרציה בחלקים ומיצאו נוסחא ריקורסיבית ל- I_m במקרים הבאים:

$$I_m = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^m} \quad (\text{א})$$

$$I_m = \int x^\alpha \ln^m x dx \quad (\text{ב}) \quad \text{כאשר } \alpha \neq -1.$$

6. חשבו את האינטגרלים הבאים ע"י הצבה מתאימה או בכל דרך אחרת:

$$a. \int \frac{1}{1-x} dx$$

$$b. \int \frac{1}{(x-1)^2} dx$$

$$c. \int \frac{x^7}{1-x^4} dx$$

$$d. \int x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx$$

$$e. \int \frac{dx}{x \ln|x|}$$

$$f. \int \frac{e^x}{e^x + \sqrt{e^x}} dx$$

$$g. \int \frac{e^x + 2}{e^x + 4 + 7e^{-x}} dx$$

$$h. \int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2} dx$$

$$i. \int \ln \sqrt[17]{x^2 + 7x + 12} dx$$

$$j. \int \cot(x) dx$$

$$k. \int x \exp(-x^2/2) dx$$

$$l. \int x^3 \exp(-x^2) dx$$

$$m. \int e^{\sqrt{x}} dx$$

$$n. \int x e^x \cos x dx$$

$$o. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} \quad (t - x = \sqrt{a^2 + x^2} \text{ נסו})$$

7. יהי $P(x)$ פולינום. הוכיחו ש-

$$\int P(x)e^x dx = Q(x)e^x + C,$$

כאשר $Q(x)$ הוא פולינום מדרגה $\deg Q = \deg P$.