תרגיל בית מס' 2:

1. נגדיר את קבוצת קנטור $C=\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{3^i} \,\middle|\, \forall i:\ a_i\in\{0,2\}\right\}\subset\mathbb{R}$

(א) הוכיחו כי C סגורה.

(ב) הוכיחו כי C אי-קשיר לחלוטין, כלומר רכיבי הקשירות של C הם רק היחידונים.

(ג) הראו כי C הומאומורפי ל- $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

(ד) נגדיר $f: C\to[0,1]^2$ ע"י:

$$f\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{3^i}\right)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_{2i+1}}{2^{i+1}},\ \sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_{2i}}{2^{i+1}}\right)$$

הראו כי f רציפה ועל.

2. תהי $(X,\leq)$ - קבוצה סדורה לינארית. נגדיר טופולוגיה על X (הנקראת טופולוגיית הסדר) ע"י הבסיס:

$$\{(a,\infty)\mid a\in X\}\cup\{(-\infty,b)\mid b\in X\}\cup\{(a,b)\mid a,b\in X,\ a<b\}$$

כאשר

$$(a,b)=\{x\in X\mid a<x<b\}$$
$$(-\infty,b)=\{x\in X\mid x<b\}$$
$$(a,\infty)=\{x\in X\mid x>a\}.$$

כלומר הקבוצות הפתוחות הן איחודים של קב' מהצורות הנ"ל.

יהי $X=[0,1]^2=\{(x,y)\mid 0\leq x,y\leq 1\}$ עם הסדר הלקסיקוגרפי וטופולוגיית הסדר לפי הסדר הלקסיקוגרפי. הוכיחו כי X קשירה אך לא קשירה מסילתית.

3. נגדיר את הטופולוגיה הבאה על $\mathbb{R}$:
בסיס לטופולוגיה הוא קבוצות מהצורה $[a,b)$ כאשר $a,b\in\mathbb{R}$ ו- $a<b$. הוכיחו ש $\mathbb{R}$ יחד עם הטופולוגיה הנ"ל הוא נורמלי.

4. הוכח או הפרך:

(א) אם $A\cup B$ ו- $A\cap B$ קשורות, אז גם A וגם B קשורים.

(ב) אם $\{J_k\}_{k=1}^{\infty}$ קב' סגורות ב- $\mathbb{R}$ כך ש $J_{k+1}\subseteq J_k$ $\forall k$ ו J_k קשור לכל k, אז $\bigcap_{k=1}^{\infty} J_k$ קשור.

5. הוכיחו כי מרחב נמיצקי $N=\{(x,y)\mid y\geq 0\}$ עם הטופולוגיה שהוגדרה בתרגול הוא רגולרי.

6. הוכיחו כי $L=\{(x,x)\mid x\in X\}$ קבוצה סגורה ב- $X\times X$ אם ורק אם X האוסדורף.
(הטופולוגיה על $X\times X$ היא כזו:
בסיס לטופולוגיה הוא מכפלות של קבוצות פתוחות עם קבוצות פתוחות.)

7. הוכיחו שטופולוגיית הספר (שהוגדרה בשאלה 2) תמיד רגולרית.