מבוא לאנליזה פונקציונלית – תרגיל 2

יש לפתור לפחות 6 מהשאלות שבדף התרגיל.

נא להגיש את הפתרון בפורמט pdf עד ה- 5 לאפריל (עד שעה לפני חצות) בקישור הבא:
https://www.dropbox.com/request/GwzZZp2sDRK2b7k4eBhi

1. (א) יהי X מרחב בנך. קבוצה $A \subseteq X$ נקראת חסומה חלש אם לכל $f \in X^*$ מתקיים $\sup_{x\in A} |f(x)| < \infty$. הוכיחו כי קבוצה חסומה חלש – חסומה גם בנורמה.

   (ב) יהי Y מרחב נורמי. נניח ש- $A_\alpha : X \to Y$ אופרטור חסום לכל $\alpha \in I$. נניח שלכל $x \in X, f \in Y^*$ מתקיים $\sup_{\alpha\in I} |f(A_\alpha x)| < \infty$. הוכיחו כי $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ חסומה בנורמה.

2. נסמן ב- $\mathcal{P}$ את מרחב הפולינומים הממשיים, וב- $K \subseteq \mathcal{P}$ את אוסף הפולינומים עם מקדם מוביל חיובי. הוכיחו כי K קבוצה קמורה שאינה מכילה את אפס, אך אין פונקציונל לינארי $0 \neq f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ כך ש-
$$f(0) \leq \inf_{P\in K} f(P).$$

3. פתרו לפחות שניים מהתרגילים הבאים:

   (א) הראו שכל נקודת שפה של כדור היחידה הסגור של ℓ_p, כאשר $1 < p < \infty$, היא נקודת קיצון.

   (ב) יהי H מרחב הילברט, ויהי $\mathcal{B}(H)$ מרחב האופרטורים החסומים על H, שהוא מרחב בנך ביחס לנורמת האופרטור. יהי $U : H \to H$ אופרטור אוניטרי. הראו ש- U נקודת קיצון של כדור היחידה ב- $\mathcal{B}(H)$.

   (ג) הראו שאוסף מידות הסתברות בורל על $[0, 1]$ הוא קבוצה קמורה, שנקודות הקיצון שלה הן מידות דלתא.

4. (א) הוכיחו שכל קבוצה פתוחה חלש שמכילה את הראשית ב- ℓ_2 מכילה אחת מהנקודות $\sqrt{n}e_n$ עבור איזשהוא $n \geq 1$.

   (כזכור, קבוצה פתוחה חלש שמכילה את הראשית, מכילה בהכרח קבוצה מהצורה $\cap_{i=1}^N \{x; |f_i(x)| < \delta\}$ עבור איזשהם $\delta > 0, N \geq 1$ ופונקציונלים לינארים חסומים $f_1, \ldots, f_N$. הראו שאחרת, $\sum_{i=1}^N |f_i(e_n)|^2 \geq \delta^2/n$ לכל n).

   (ב) הזכרו שסדרה המתכנסת חלש במרחב הילברט – חסומה (זה אפילו נובע מתרגיל 1 לעיל). הסיקו שהתכנסות חלשה ב- ℓ_2 אינה מטריזבילית, כלומר אין מטריקה על ℓ_2 שהתכנסות בה שקולה להתכנסות חלשה: אחרת לסדרה $\sqrt{n}e_n$ היתה תת סדרה מתכנסת.

(ג) הראו שאם X מרחב נורמי ספרבילי, טופולוגית w^* על כדור היחידה $B(X^*)$ ניתנת על ידי המטריקה

$$d(f,g)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|f(x_n)-g(x_n)|}{n^2}$$

כאשר (x_n) סדרה צפופה ב- $B(X)$.

5. תהי (x_n) סדרה ב- ℓ_1 המתכנסת חלש ל- $x\in\ell_1$. הוכיחו כי ההתכנסות היא בנורמה.

(רמז: נניח בשלילה ש- $y_n=x_n-x$ לא שואפים בנורמה לאפס. אז אפשר לעבור לתת סדרה ולהשיג קבוצות זרות $I_k\subset\mathbb{N}$ כך שרוב מסת ℓ_1 של y_{n_k} מגיעה מאינדקסים ב- I_k. איזה פונקציונל ב- ℓ_∞ נבחר כדי לקבל סתירה?)

6. (א) תהי (a_n) סדרה חסומה ויהי $L\in\mathbb{C}$ כך ש-

$$S_{n,k}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_{i+k}\xrightarrow{n\to\infty}L \tag{1}$$

וההתכנסות היא במ"ש ב- $k\geq 1$. הוכיחו כי כל גבול בנך של (a_n) שווה בהכרח ל- L.

(ב) הראו כי אם $S_{n,k}$ לא מתכנס במ"ש ב- k כאשר n שואף לאינסוף, אזי אפשר למצוא שני גבולות בנך שאינם מסכימים על הסדרה (a_n).

(רמז: הזכרו בהוכחה של משפט האן-בנך. כשמרחיבים את $\lim_{n\to\infty}$ ממרחב הסדרות המתכנסות E למרחב $E\oplus sp\{x\}$, מהו אי השיוויון שגורר את אי יחידות ההרחבה?)

7. הוכיחו לפחות שתיים מהטענות הבאות:

(א) יהי X מרחב נורמי כך ש- X^* ספרבילי. אזי גם X ספרבילי.

(ב) אם X רפלקסיבי ו- E ת"מ סגור, גם E רפלקסיבי.

(ג) מרחב בנך רפלקסיבי אם ורק אם הדואלי שלו רפלקסיבי.

(ד) אם X מרחב בנך, $E\subseteq X$ ת"מ סגור רפלקסיבי, כך שגם X/E רפלקסיבי - אזי X רפלקסיבי.

8. הוכיחו שקיים מרחב פונקציות אינסוף ממדי X בקטע $[0,1]$, סגור ביחס לנורמת L_p לכל $p\in[1,\infty)$, כך שנורמת L_p ונורמת L_q שקולות ב- X, ואפילו פרופורציוניות.

(רמז: הבנייה תוארה בקווים כלליים בשיעור 2, בונים פונקציות $f_1,f_2,\ldots:[0,1]\to\mathbb{R}$ כך שכל צירוף לינארי $\sum_{i=1}^{\infty}a_if_i$ עם מקדמים ממשיים שמקיימים $\sum_i a_i^2=1$, מתפלג כמו משתנה מקרי נורמלי סטנדרטי).