חדו"א 1 - תרגיל 3

23 בנובמבר 2008

1. יהי $\alpha > 0$ חתך חיובי. נגדיר:

$$\alpha^{-1} = \{q \in \mathbb{Q} | q \leq 0\} \bigcup \{\frac{1}{q} | q \notin \alpha \wedge \exists b \notin \alpha \ s.t. \ b < q\}$$

   (א) בדקו כי α^{-1} עומד בהגדרת החתך.
   (ב) הוכיחו על פי הגדרת כפל חתכים כי: $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$.

התייחסו לשאלות הבאות כאל שאלות על מספרים ולא בהצגתם כחתכים:

2. הוכיחו את הטענות הבאות:
   (א) $\frac{p}{q}\sqrt{2}$ הוא מספר אי־רציונלי לכל $p, q \in \mathbb{Z}$ ו $q \neq 0$.
   (ב) בין כל שני רציונלים יש מספר אי־רציונלי.

3. <u>הוכיחו או הפריכו</u>:
   (א) אם $a \in \mathbb{Q}$ ו $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, כלומר a רציונלי ו b אי־רציונלי, האם $a + b$ בהכרח אי־רציונלי?
   (ב) אם $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ו $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, כלומר a אי־רציונלי וגם b אי־רציונלי, האם a^b בהכרח אי־רציונלי? (רמז: $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$)

4. <u>הוכח</u>: לכל קבוצה $A \subset \mathbb{Z}$ של מספרים שלמים כך ש A חסומה מלעיל יש מקסימום.

5. חשב עבור הקבוצות הבאות את הבאות את הגדלים: $\max A, \min A, \sup A, \inf A$ במידה והם קיימים.
   (א) $A = \{x \in \mathbb{R} | x = 0 \ or \ x = \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}\}$
   (ב) $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + x - 1 \geq 0\}$
   (ג) $A = \{\frac{1}{n} + (-1)^n | n \in \mathbb{N}\}$
   (ד) $A = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$
   (ה) $A = \{b \in \mathbb{Q} | b < 0 \ or \ b^2 < 2\}$

6. נניח כי A ו B הן קבוצות לא ריקות של מספרים ממשיים כך ש $a \leq b$ לכל $a \in A$ ולכל $b \in B$. הוכח כי : $\sup A \leq \inf B$.

7. A ו B קבוצות לא ריקות של מספרים ממשיים. <u>הוכח או הפרך</u>:

(א) אם לא קיים $\max A$ אז ב A יש ∞ איברים.

(ב) אם ב A יש ∞ איברים ולא קיים בה איבר מינימלי אז A אינה חסומה.

(ג) אם A ו B חסומות ונתון: $\sup A = \inf B$ אז ב $A \bigcap B$ יש איבר אחד.

(ד) אם A ו B חסומות ונתון: $A \bigcap B = \emptyset$ אז $\sup A \neq \sup B$.

8. יהיו הקבוצות $A, B \subset \mathbb{R}$ לא ריקות. ונתון כי $A \subseteq B$ הוכח כי:

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$$

<u>הגדרה</u>: הסופרמום של הפונקציה $f : A \to B$

הינו: $\sup f \equiv \sup\{f(x)|x \in A\} = \sup Image(f)$

9. נתונות הפונקציות $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ חסומות, הוכח כי $\sup(f+g) \leq \sup g + \sup f$.
תן דוגמא לאי שיוויון ממש.

10. תהי הפונקציה הבאה : $r(x) : (0,1] \to (0,1]$ המוגדרת כך:

$$r(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & if\ x \in \mathbb{Q}, x = \frac{p}{q} \\ 1 & if\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

כאן כשרושמים $x = \frac{p}{q}$ אז הכוונה לשבר המצומצם ביותר.
<u>הערה</u>: זוהי גירסה של פונקציית רימן.
מצא את $\sup f, \inf f$ האם קיימים $\max f, \min f$?

11. הוכיחו כי כל פונקציה f ניתן לכתוב כסכום שתי פונקציות h ו g כך: $f = g + h$ המקיימות ש g זוגית, כלומר: $g(x) = g(-x)$ ו־ h אי־זוגית כלומר, $h(-x) = -h(x)$.

12. $(\star)$ נתונה הקבוצה: $E = \{(1+\frac{1}{n})^n | n \in \mathbb{N}\}$ הוכח כי $2 < \sup E < 3$. האם קיים $\max E$?

<u>הדרכה:</u>

(א) חשבו: (סכום סידרה הנדסית) $\sum_{n=1}^{n=k-1} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}} = ?$.

(ב) הוכיחו כי: $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}} \quad \forall k \geq 2$

(ג) הראו כי מתקיים: $\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq 3$

(ד) באמצעות נוסחת הבינום הוכיחו כי: $(1+\frac{1}{n})^n < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$.