טופולוגיה - תרגיל מס' 83

1. האם הטופולוגיה הקו-סופית על $\mathbb{R}$ היא מנייה שנייה? מנייה ראשונה? ספרבילית?

2. הוכח כי אם מ"ט X הוא C_1 (מניה ראשונה) אז כל $x\in X$ מקיימת ש-$\{x\}$ היא הקבוצה G_δ (חיתוך בן מנייה של פתוחות).

3. הוכיחו כי $[0,1]^2$ עם טופולוגיית הסדר הלקסיקוגרפי הוא C_1 אך אינו ספרבילי.

4. הוכיחו כי $C[0,1]$ ספרבילי. (רמז: משפט וויירשטראס על קירוב עם פולינומים)

5. הוכיחו כי אם $X=\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ כאשר X_n ספרבילי לכל n, אזי X ספרבילי.

6. הוכיחו כי אם X ספרבילי, $A\subset X$ פתוחה אז A ספרבילית.

7. הוכיחו כי $\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הנוצרת ע"י קבוצות מהצורה $[a,b)$ הוא ספרבילי אך לא C_2.

8. הוכיחו כי תת-מרחב של מרחב מטרי ספרבילי הוא ספרבילי.

9. האם קיים מרחב לא ספרבילי X כך שאם $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ קבוצות פתוחות וזרות ב-X אז $|I|\le\aleph_0$?

10. (א) הוכיחו כי תת-מרחב של C_2 הוא C_2.
(ב) תהי $f:X\to Y$ רציפה ופתוחה (כלומר, לכל $U\subset X$ פתוחה $f(U)\subset Y$ פתוחה) כאשר X הוא C_2. אזי $f(X)$ C_2 עם הטופולוגיה המושרית.