חדו"א 2 - תרגיל מס' 3

1. נניח ש- $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית וסימטרית ביחס למרכז הקטע $c=(a+b)/2$, כלומר, $f(a+x)=f(b-x)$ לכל $0\le x\le b-a$. הוכיחו ש- $\int_a^b f=2\int_a^c f$.

2. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית על כל קטע סופי ומחזורית עם מחזור $T>0$ (כלומר, $f(x+T)=f(x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$). הוכיחו שהאינטגרל $I(a)=\int_a^{a+T}f(x)dx$ אינו תלוי ב- a.

3. חשבו את האינטגרלים המסויימים הבאים:

$$a.\ \int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx \quad b.\ \int_{-1}^1\sqrt{(1-x^2)^3}dx \quad c.\ \int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx$$
$$d.\ \int_0^2|1-x|dx \qquad e.\ \int_0^6\lfloor x\rfloor\sin\frac{\pi x}{6}dx$$

4. חשבו את הנגזרות הבאות: $a.\ \frac{d}{dx}\int_0^{x^2}e^{t^2}dt, \quad b.\ \frac{d}{dx}\int_{x-\sin x}^{\sin x}\arcsin(t)dt$

5. חשבו את גבול הסדרות הבאות:

$$a_n=\frac{1}{n^5}\left(1^4+2^4+\ldots+n^4\right), \qquad b_n=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n ie^{i^2/n^2}$$

6. הוכיחו ש- $0<\int_0^{\pi/4}\frac{1-\cos x}{x}dx<\frac{\pi^2}{64}$.

7. תהי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$. נסמן $M=\sup_{[a,b]}|f|$. הוכיחו ש-

$$M=\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b|f(x)|^ndx\right)^{1/n}.$$

8. תהי f פונקציה גזירה ברציפות n פעמים בקטע $[a,b]$. השתמשו במשפט ערך הביניים האינטגרלי כדי להראות שקיימת $c\in(a,b)$ שעבורה

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^b f^{(n)}(t)(b-t)^{n-1}dt$$

(כלומר, שארית לגרנז' לטור טיילור נובעת מהשארית האינטגרלית).

9. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה המקיימת $f(a)=f(b)=0$. הוכיחו שקיימת נקודת $c\in(a,b)$ עם $|f'(c)|\ge\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx$.

10. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה. עבור $\delta>0$ נסמן

$$F_\delta(x)=\frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)dt$$

(א) הוכיחו שלכל $x_0\in\mathbb{R}$ מתקיים ש־ $\lim\limits_{\delta\to 0^+} F_\delta(x_0)=f(x_0)$.

(ב) יהיו $a<b$. הוכיחו שלכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ מספיק קטנה שעבורה

$$\forall x\in[a,b],\qquad |F_\delta(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

11. ★ תהי $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה וקמורה[1] עם $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$. הוכיחו שקיים, סופי וחיובי הגבול

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n-1)+\frac{1}{2}f(n)-\int_1^n f(x)dx\right)$$

(ועכשיו, תנו פיתרון נוסף לשאלה 6, סעיף ג בבחינה בחדו"א 1).

[1] כזכור, פונקציה נקראת קמורה אם $f(\lambda x+(1-\lambda y)\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ עבור $0\le\lambda\le 1$. במקרה של פונקציה גזירה, זה שקול לכך ש־ f' עולה.